

I SEI PRIMI

ELEMENTI

DELLA

GEOMETRIA PIANA

A cui ſi aggiugne alcun ſaggio de' molti uſi, che le propoſizioni elementari ſomminiſtrano

ALLA FISICA, ALLA MECCANICA, ALL'ASTRONOMIA, E AD ALTRE PARTI DELLA MATEMATICA.

DI

LEONARDO XIMENES

DELLA COMPAGNIA DI GESU'

GEOGRAFO DI S. M. I.





IN VENEZIA, MDCCLII.

PRESSO GIAMBATISTA ALBRIZZI q. GIR.

Con Licenza de' Superiori.



A SUA ECCELLENZA

IL SIGNOR CONTE DI

RICHECOURT



ECCELLENZA.

Io son sicuro, che l'Eccellenza Vostra fra' molti volumi, i quali ella in mezzo a' suoi gravissimi affari non isdegna di avere alle mani, dee aver lette le antiche, e perpe-

tue vicende, che le istituzioni geometriche anno patite al par delle cose civili, e cittadinesche. Poichè, per tralasciare i più remoti tempi di Talete Milesio, d' Ippia Eleo, di Pittagora, d' Anassagora, d' Archita, di Platone, d' Amicla, e di assaissimi altri, i cui ritrovamenti geometrici essendo come le membra da un corpo recise, sostennero più crudelmente la forza della fortuna, anche nelle età che seguirono, quando Euclide delle sparse membra formò un corpo intero, e robusto, fu esso in varie forme assalito, e combattuto. E benchè di tali assalimenti, e combattimenti sieno perite assaissime memorie, pure appresso Proclo Diadoco molti frammenti ci sono rimasi,

da'

da' quali chiaramente apparisce , che Apollonio , Tolomeo , Pappo , e Gemino quel corpo appena nato in qualche parte discomposero , ed in altra forma ridussero . Gli Arabi venner dappoi , i quali la dottrina delle Parallele , e quella delle Proporzioni combatterono , e riformarono . Ma a dir vero niuno fu fino a que' tempi degli arabi , il quale ardisse di tutto scomporre , e quasi risolvere un tal corpo , ma chi una parte , e chi un' altra aveva assalita , e disfatta . Ma dal Galileo fino a' dì nostri chi mai potrebbe ad una ad una raccontare le varie fortune , e le generali ed ampie percosse da lui sostenute ? E se alcun lo potesse , chi mai ardirebbe di raccontarle all' E. V. delle vicende non

sola-

ſolamente civili, ma ancor letterarie sì ſquiſitamente informata?

Eſſendo dunque certiſſimo, e per una sì lunga induzion confermato, che le iſtituzioni geometriche aſſai più, che qualunque altr' opera ſieno ſoggette a' colpi di una contraria fortuna, conviene a coloro, che a tali coſe anno applicato i loro penſieri, di procacciarſi una difeſa, che gli aſſicuri. Io ſono un di coloro, che per amore del pubblico bene a tale impreſa mi ſon condotto, e che in lei cerco difeſa, e ſicurezza. La geometria era a tal perfezion pervenuta, che a quel belliſſimo corpo poco parea, che mancaſſe. Si bene erano inteſe le ſue parti, e con sì giuſta proporzione l' una all' altra corriſpondenti. Ma l' aria di

un

un tal corpo era così ſevera, e ſoſtenuta, che atterriva i giovani di mediocre coraggio. Non era dunque conveniente, che alcun ſi trovaſſe, che a lui togliendo quella maſchera di auſterità, la qual forſe a bello ſtudio gli era ſtata dagli antichi adattata, ſi argomentaſſe di procacciargli un aſpetto gioviale, e dimeſtico? Il che mi ſono io ſtudiato di fare in molte maniere, e maſſimamente aggiugnendo a tali Elementi alcun ſaggio de' molti, e belliſſimi uſi, che eſſi alla Fiſica, alla Geografia, alla Meccanica, all' Aſtronomia ſomminiſtrano. E pure chi ſa, che queſto ſteſſo non mi ſia poſto a delitto da coloro, i quali par che godano di rendere ogni giorno più difficili gli ſtudj più

giovevoli , e necessarj ? Comunque ciò siasi , a me basterà , che quest' operetta , che io le presento , incontri appresso l' Eccellenza Vostra approvazione , e patrocinio .

Di che io umilmente la prego , e che ardisco di promettere a me stesso , se io non vado ingannato . Poichè non è la geometria quel potentissimo , e necessario Strumento , onde poter condurre a fine quelle intraprese , che dalla magnanimità del suo spirito , dalla vastità de' suoi pensieri , dagl' interni stimoli del suo sangue vengono in lei a comun benefizio eccitate , e promosse ? Se la Nautica , l' Idrostatica , la Meccanica avesser senso , e parole , a chi renderebbono umili grazie fuori che alla geometria , come a

comun

comun loro madre , ed all' Eccellenza Vostra come a comune loro benefattore ? Le quali cose conoscendo io , e considerando altresì le molte testimonianze da me ricevute della sua degnazione verso di me , non ho dubitato , che non dovesse esserle gradito un dono , il quale cooperando alla grandezza delle sue idee , le potesse insieme significare la gratitudine dell' animo mio pe' passati , e presenti suoi benefizj .

DELL' ECCELLENZA VOSTRA.

Di Collegio 11 Ottobre 1751.

Umilissmo, Devmo., ed Obblmo. Servo
LEONARDO XIMENES
della Compagnia di Gesù.

JOANNES ANTONIUS TIMONI

SOCIETATIS JESU

In Provincia Romana Præpositus Provincialis.

CUm librum, cui Titulus -- *I primi sei Elementi della Geometria piana* -- a P. Leonardo Ximenes nostræ Societatis Sacerdote conscriptum, aliquot ejusdem Societatis Eruditi Viri recognoverint, & in lucem edi posse probaverint, potestate nobis a R. P. Ignatio Vicecomite Vicario Generali ad id tradita facultatem concedimus, ut typis mandetur, si ita iis, ad quos pertinet, videbitur. In quorum fidem has litteras manu nostra subscriptas, & sigillo nostro munitas dedimus.

Romæ die 28. *Novemb.* 1750.

JOANNES ANTONIUS TIMONI.

NOI RIFORMATORI

dello Studio di Padova.

Avendo veduto per la Fede di Revisione, ed Approbazione del P. F. *Paolo Tommaso Manuelli* Inquisitor General del Santo Officio di Venezia nel Libro intitolato *I sei primi Elementi della Geometria Piana ec. di Leonardo Ximenes della Comp. di Gesù Ms.*, non vi esser cosa alcuna contro la Santa Fede Cattolica, e parimente per Attestato del Segretario Nostro; niente contro Principi e buoni costumi, concediamo Licenza a *Giambatista Albrizzi q. Gir. Stampatore di Venezia*, che possi esser stampato, osservando gl'ordini in materia di Stampe, e presentando le solite Copie alle Pubbliche Librerie di Venezia, e di Padova.

Dat. li 23. Novembre 1751.

(Zuane Querini Proc. Rif.
(
(Barbon Morosini Cav. Proc. Rif.

Michiel Angelo Marino Segr.

Registrato in Libro a Carte 15 al Num. 176

Adi 24 Novembre 1751
Reg. nel Mag. Ecc. degli Esecutori contro la Best.

Alvise Legrenzi Segr.

	Errori.	Correzioni.
Pag. 53. *verso* 20.	H P E uguali	H P F uguali
Pag. 54. *verso* 15.	H P E, che	H P F, che
Pag. 68. *verso* 16.	si conduca F G I	si conduca F H
Pag. 68. *verso* 19.	M D, I F sono uguali	M D, H F sono uguali
Pag. 71. *verso* 20.	D A, B D essendo	C A, B D essendo

Negli usi del primo Elemento va sempre guardata la tavola III, e non la tavola IV.

Pag. 84. *al margine*	Tav. IV. Fig. XI.	Tav. III. Fig. IX.
Pag. 88. *verso* 21.	l'angolo istesso	l'angolo riflesso
Pag. 93. *verso* 11.	di grandezza in una curva	di grandezza, esse saranno in una curva
Pag. 107. *verso* 12.	Sia la A B = 15.	Sia la A B di palmi 15
Pag. 135. *verso* 21.	dell'angolo F A O	dell'angolo F A B
Pag. 164. *verso* 25.	i punti O, D.	i punti C, D.
Pag. 184. *verso* 6.	compariva sia la data	compariva. Sia la data
Pag. 184. *verso* 9.	la cui circonferenza tocca, o sega la data linea	la cui circonferenza o sega la data linea
Pag. 209. *verso* 22.	angoli, o lati dividendo	angoli, o lati. Dividendo
Pag. 244. *verso* 15.	è uguale al moltiplice	è uguale al moltiplice della quarta
Pag. 246. *verso* 7.	piu una simil parte aliquota,	più una simil parte aliquota nel 5[1],
Pag. 248. *al margine*	(q) Definiz.	(q) Definiz. 15.
Pag. 264. *verso* 10.	C O a D R. Si è mostrata	C O a D R si è mostrata
Pag. 267. *verso* 12.	*Corollario ec.* appartiene alla Prop. XII.	
Pag. 307. *verso* 1.	B A. Poichè	B C. Poichè
Pag. 308. *verso* 2.	C B D:	C B D;
Pag. 318. *verso* 5.	la proposizione 21.	la proposizione 22.

PRE-

PREFAZIONE.

1 SE per avventura alcun di voi si maravigliasse, eruditissimi Signori, perchè mai dopo le immortali opere di Geometria elementare dal Fineo (*a*), dal Pelletario (*b*), dal Candalla (*c*), dal Clavio (*d*), dallo Chales (*e*), dall'Erigonio (*f*), dal Barrovio (*g*), dal Tacquet (*h*), dallo Scheubelio (*i*), dal Borelli (*k*), dal Viviani

(*a*) Orontii Finei Promathesis. Parisiis 1532.

(*b*) Commentario sopra i sei libri di Euclide l'anno 1557.

(*c*) Aggiunse agli Elementi il 16, 17, e 18. de' solidi.

(*d*) Euclidis Elementorum libri XV. Romæ 1574.

(*e*) Euclidis Elementorum libri octo. Lugduni 1674, di più edizione Parigina l'anno 1709.

(*f*) Corso Matematico in Latino, ed in Francese. In Parigi l'anno 1644. in 8.

(*g*) Euclidis Elementorum libri XV. Cantabrigiæ 1655, & Londini 1659.

(*h*) In Cantabrigia per opera di Guglielmo Wiston l'anno 1703; In Padova l'anno 1729: Elementa Geometriæ planæ, & solidæ: ed in Roma l'anno 1745 con aggiunte.

(*i*) I primi sei Elementi in Basilea l'anno 1550. in foglio.

(*k*) Euclides restitutus. Pisis 1658.

ni (*a*), dal Pardies (*b*), dal Polinier (*c*), dal Marchetti (*d*), dallo Scotti (*e*), dal Bettini (*f*), dal Wolfio (*g*), dal Clairaut (*h*), dal Deidier (*i*), e da altri assaissimi eccellenti Scrittori a noi tramandate, ancor per me si propongano nuovi elementi, ei facilmente intenderà non essere nè inutile, nè temeraria questa intrapresa, soltanto, che l'animo non avverso rivolga alle ragioni di questo consiglio; le quali essendo gravissime, io vi prego a volerle benignamente ricevere, e pesare, ed esaminare. E primieramente io vi domando, se sia vero, che in questo

(*a*) Elementi piani, e solidi: in Firenze 1690. in Italiano.

(*b*) Elementa Geometriæ. Jenæ 1684.

(*c*) Elémens des Mathématiques. A Paris 1704.

(*d*) Euclides reformatus, Pistorii 1698, & Liburnii 1709.

(*e*) Cursus Mathematici Liber III. Herbipoli 1661.

(*f*) Ærarium Philosophiæ Mathematicæ, sive Elementa Philosophiæ Geometricæ de Planis, curvis, & solidis figuris, &c. Bononiæ 1648.

(*g*) Elementa Matheseos universæ, Genevæ 1732.

(*h*) Elementi di Geometria in Francese, in Parigi l'anno 1741

(*i*) Suite de l'Arithmetique de Géométres, A Paris 1739.

ſto noſtro ſecolo lo ſtudio geometrico ſia comune a molti, e quaſi univerſal divenuto più, che in ogni altro? Certo che sì. In oltre io vi ricerco, ſe di così gran moltitudine, e varia di Studianti, ciaſcuno ſia di raro ingegno, ed eccellente, o non piuttoſto, che alcuni mezzanamente abili, ed ingegnoſi ſe ne ritrovino. Finalmente è da eſaminare, ſe di quegli elementi, che conſervano il rigor Geometrico, molti, o alcun ve ne ſia, che a queſta moltitudine, e varietà di giovani, e a queſta mediocrità d'ingegni ben ſi confaccia. Certo è, che, ſe dirittamente vuol giudicarſi, e riguardare, o le teſtimonianze di color, che inſegnano, o le querele cotidiane dei Giovani più perſpicaci, o lo ſgomento di altri aſſaiſſimi, i quali, o alle prime propoſizioni s'abbattano, o nel ſecondo Elemento ſmarriſcon la via, o ſe pur quello oltrepaſſano, al quinto fanno naufragio, ſe finalmente la difficoltà delle dottrine vuolſi eſaminare, ſi pronunzierà, una tal Geometria alla moltitudine confacevole, non eſſere a noi pervenuta. Il che

non a biasimo de' passati Scrittori dee attribuirsi, anzi è loro altissima lode, che essi d' insolita forza d'ingegno essendo dotati, non ad altri abbiano scritto, che a coloro, i quali ad essi in questa dote più si assomigliano. Ma siavi pure una tal geometria, che anche i deboli non isgomenti gran fatto, è egli forse un delitto l' aprire più larga, e piana via ad una sì folta turba di novelli geometri? Non sarebbe cosa vantaggiosa, se ciò che malagevolmente si apprende, meglio si esponga, e ciò, che colla lunghezza infastidisce, si accorci, e ciò che colla sublimità della dottrina sbigottisce i più forti, si faccia agevole, e piano? Or questo è il primo fine di questa nuova intrapresa.

2 Che se dalla Geometria alla novella Fisica rivolgiamo i pensieri, noi tal la troveremo, quale nelle preterite età non è stata giammai, cioè di Geometriche figure sparsa, e fregiata. Il che di quanto giovamento, e ingrandimento sia stato a questa più bella parte della Filosofia, niuno è che nol sappia. Ma essendo sempre la difficoltà delle

le grandi opere indivisibil compagna; è incredibile quanto dura cosa sia, e pericolosa la giusta applicazione della geometria ai ritrovamenti della Fisica; di che mi faranno testimonianza tutti coloro, che in questo vastissimo pelago sono entrati. Non sarebbe adunque da dirsi lodevole una tal novità, la quale più larga, ed ampia via aprendo all' inesperta gioventù, la conducesse per giusto ed agiato sentiero alla sublimità della moderna Filosofia? Questo è l' altro fine, a cui è indirizzata questa qualunque nuova fatica. Ora è da cercarsi per qual maniera si possa in questi Elementi giugnere all' uno, e all' altro intendimento, cioè di giovare alla moltitudine, e di avviarla allo studio della Fisica. E quantunque assai più dalla lettura dagli Elementi stessi potrete intenderne voi medesimi, che non si possa dichiarar ragionando, pure m' ingegnerò di andarvi mostrando ora un passo, ed ora un altro, dove la via degli Elementi è stata da me o accorciata, o agevolata.

3 E prima mi si permetta, che io

quasi indietro ritirando i miei passi, vada esaminando le vie, che molti Autori anno seguite, allontanandosi assaissimo dal metodo degli antichi. Pietro Ramo quasi alla fine del decimo sesto secolo (1) aveva tentato di ritessere la tela degli Elementi secondo lui sì mal tessuta dagli antichi. Il che avendo avuto un esito infelicissimo, forse verso la metà del decimo settimo secolo il Signor Arnaldo, il quale anche nelle cose geometriche, le quali non gli appartenevano assaissimo, volle sedere giudice e maestro; e per vaghezza d' introdurre negli Elementi il buon ordine, che a suo giudizio mancava capovoltò la Geometria per modo, che non parve più dessa (2). E certo, se fosse vero ciò, che nella prefazione dice il Signor Nicol; niuna cosa esservi più confacevole per introdurre negli intelletti la confusione, e il disordine, quan-

(1) Petri Rami Arithmeticæ libri duo, Geometriæ septem & viginti a Lazaro Schonero recogniti & aucti in 4. Fran. an. 1590.

(2) Nova Elementa Geometriæ an, 1667.

quanto gli Elementi di Euclide, grandiſſimo benefizio averebbe recato il Signor Arnaldo agli ſtudianti delle coſe Matematiche, e a tutta l' umana società; ma io ritrovo al contrario, che autori, cui meglio appartienſi il dar ſentenza ſu tali materie, credono anzi, e ſoſtengono, niuna mutazione eſſere ſtata alla Geometria così dannoſa, quanto la mutazione dell' Arnaldo, come quella, la quale abbia introdotto il dubbio, e l' incertezza in una ſcienza, che ſola è ſtata riguardata, e riguardar ſi dee, come maeſtra, e cuſtode della certezza, e atta a sbandire dalle noſtre menti il Pirroniſmo! E per ometter degli altri, il Signor Wolfio (1), e il Signor Leibnizio (2) tal ſentenza anno pronunziata contra gli Elementi dell' Arnaldo, e per conſeguenza del Padre Lamì (3), e del Sig. Malezieu, i quali batterono la medeſima ſtrada (4) Il

(1) Tomo V. de' ſuoi Elementi cap. 3. 6. 8. (2) Come atteſta il Wolfio. (3) Elementi di Geometria del Padre Bernardo Lamì in 12 in Parigi l' an. 1685. in Franceſe. (4) Elementi di Geometria del Sere-

Wolfio è di avviso eziandìo, non poterſi abbandonare la via da Euclide tenuta, ſenza che nel tempo ſteſſo ſi abbandoni il rigore del dimoſtrare; la qual ſentenza, benchè dal Signor Deidier ſia riputata precipitoſa, ed ingiuſta, pure eſſendo uſcita dalla penna di un tal Uomo non va diſprezzata. Non ardirò già io di ſottoſcrivere ad eſſa; che queſto ſarebbe lo ſteſſo, che fare una grandiſſima ingiuria a due gran Geometri del noſtro ſecolo cioè il Signor Deidier, e il Signor Clairaut (*a*), i quali ſon di avviſo di aver meſſa alla luce una Geometria, che col rigor del dimoſtrare congiunga tutto il buon ordine delle materie; ma mi ſia almeno permeſſo, che io poſſa quì riferire il ſentimento di qualche Geometra di gran nome, il quale nella Geometria degli Antichi riconoſce, e ravviſa una gran dote, che è di meglio addeſtrare, e formare con certi

niſſimo Duca di Borgogna in Trevù l'anno 1705. in Franceſe ſoppreſſo il nome dell'Autore.

(*a*) Elementi di Geometria in Parigi l'anno 1741. in Franceſe.

certi diritti, e forti raziocinj un Geometra, i quali raziocinj, ove si snerbassero, ed ammollissero moltissimo, si formerebbe uno Scolare debole, e delicato, come si forma un debol Soldato, ove gli esercizj della milizia si rendano assai comodi, ed agiati. La sentenza medesima, che il Wolfio pronunzia contro dell' Arnaldo forse cade sopra gli Elementi del Padre Gottignies, il quale parte per amore di un miglior ordine, e parte per isbandire quella maniera di dimostrare che domandasi *riduzione all' impossibile* scrisse quasi nel tempo stesso che l' Arnaldo, e forse con miglior Logica, e più rigore di lui (*a*).

4 E perchè non si creda, che io voglia decidere questa lite colla sola autorità, la quale in simiglianti maniere non vale assai, vediamo per qual ragione siansi mossi quegli autori a voler distruggere il lavoro di Euclide e di tanti suoi commentatori.

Per molto, che si legga, e si pensi si

(*a*) Elementa Geometriæ planæ Egidii de Gottignies Soc. J. Romæ 1669.

ſi troverà eſſer queſta la ragione. Il buon guſto e la legge del ben penſare ricercano, che dalle coſe ſemplici, ſi paſſi alle compoſte. Il che io non negherò, ove ſi ſerbino queſte due condizioni, che colla ſemplicità delle materie vada congiunta, e la facilità, e il rigore del dimoſtrare. Poichè ſe la materia ſarà più ſemplice, ma la difficoltà del dimoſtrare, e dell' intendere grandiſſima, perchè debbe la ſemplicità della materia anteporſi alla facilità dell' intendere, e non anzi la facilità dell' intendere alla ſemplicità delle coſe? Certo è che le grandezze, come ſemplici grandezze, ſon coſa più ſemplice, che non ſieno le grandezze medeſime per tale, e tal modo diſpoſte, e collocate, e formanti tali e tali angoli; e pure chi voleſſe premettere agli Elementi il paragone delle grandezze conſiderate in ſe ſteſſe; il che ſi fa nella dottrina delle proporzioni, come dopo il Gottignies anno fatto il Wolfio (1) e il

(1) Chriſtiani Wolfii Ele: Matheſeos univerſæ tom, I, editio nova Genevæ 1732.

il Deidier, (1) farebbe cosa contraria all'uso della natura, la quale dalle operazioni più facili oltrepassa alle difficili; e a qualunque arte o mestiero, nel quale dalle più facili sempre si dà principio. Quanto poco vaglia la ragion generale della semplicità delle cose, dalle arti medesime si può argomentare, nelle quali le cose di natura loro più semplici sono per lo più le ultime ad impararsi. Il tirare col pennello una linea ben diritta, e lunga, è opera da consumato pittore. Lo spianare e dirizzare accuratamente una piastra d'oro, d'argento, d'ottone, un asse, una trave, è l'ultima cosa che i lavoratori di tali materie imparano a ben fare. Che se alla difficoltà delle cose si aggiunga il pericolo di mal dimostrare, allora sì che sarebbe frenesia il lasciarsi trasportare da una certa apparente, e mal intesa semplicità di materie, e in vece di formare una Geometria, partorire un mo-

(1) Elementi generali delle Matematiche dell'Abbate Deidier a Parigi 1745. in Francese.

mostro di facoltà, che al mondo non è stata giammai, e che è ben tenerla da noi lontana. Da tali cose da me fin'ora recate, io formerò una legge, la quale ho sempre avuta avanti agli occhi nello scriver questi Elementi, cioè che in essi solo va fatto quel cangiamento, in cui colla semplicità delle materie vada congiunto prima il rigore, poi la minore, o almeno pari facilità del dimostrare. Posta una tal legge ecco in quali passi, e per qual modo la via degli Elementi è stata da me agevolata.

5 E primieramente (lasciando ora da parte, che un gran numero di nuove dimostrazioni per maggior facilità s'introducono) le antiche dimostrazioni si dirizzano per modo, che a concepirsi più facili, e a dimenticarsi sieno più malagevoli. Al che fare io prima ho procurato ad imitazione del Barrovio, che esse abbiano una brevità, che non le oscuri. Ma, ove per la natura dei Teoremi sono stato astretto a lunghe dimostrazioni, mi sono argomentato di ordinarle per modo, che tutta intera la dimostrazione dentro tre o quattro

prin-

principali proposizioni, o asserzioni sia racchiusa, le quali poi avendo bisogno di particolar dimostrazione, con più minuto carattere l' ho aggiunta quasi separatamente, imitando l' acutissimo Einecció (1); affinchè s' intenda, qual sia la dimostrazion primaria, quali le secondarie. E a dir vero nell' insegnare gli Elementi Geometrici, io mi sono spesso avveduto, che i giovani in tali dimostrazioni perdono il filo del raziocinio appunto perciò, che essendo confusamente mescolate le dimostrazioni primarie colle secondarie, nè essendo facile le une dall' altre dividere col pensiero, essi si trovano inviluppati e confusi, senza sapere, quale dei molti fili che anno alla mano al desiderato fine gli conduca.

6 Secondariamente nell' ordine stesso delle proposizioni mi sono studiato d'introdurre quel metodo, che più giusto, e confacevole mi par che sia. Così nel primo

(1) Jo: Go: Heinecii Elementa Philosophiæ rationalis & moralis Venetiis.

primo Elemento, dal qual forse dipende lo scoramento e coraggio degli studianti, premetto una serie di Teoremi, e poi un'altra di Problemi, che da' Teoremi nascono, e si derivano nel modo appunto, che veggo praticato con somma lode dall'Ospital nelle sue (1) Sezioni Coniche. Il che ho fatto in modo, che niente al rigor Geometrico, venga tolto. Nell'ordine stesso de' Teoremi ho seguitato la legge del buon metodo di cominciar dalle più semplici, e da queste passare alle più composte. Indi è che essendo cosa più semplice la considerazione de' soli angoli, che quella delle linee cogli angoli mescolate, ho perciò concesso il primo luogo nel primo libro a due Proposizioni, che nel mezzo dagli altri s'inseriscono. Dagli angoli passo a' triangoli uguali, e somiglianti, de' quali dimostro l' ugualtà o da' due lati, e l'angolo compreso uguali, o da un lato, e due angoli adja-

(1) Traite Anal. des Sect. Coniques de M. de l'Hôpital. A Venise 1740.

adjacenti uguali, o da tre lati uguali. Dalla considerazione di tali triangoli nascono alcuni Problemi, che io soggiungo. Da questi passo alle proprietà delle parallelle, dalle quali nasce l'ugualtà di altri triangoli tra loro somiglianti, e da questi l'ugualtà de' Parallelogrammi, e da questi la celebre Pitagorica, dopo della quale chiudo il libro con proporre alcuni Problemi, che nascono dalle antecedenti proposizioni. Ecco in qual modo il primo Elemento, che più degli altri par disordinato, e confuso, sembra ridotto al suo buon' ordine, e secondo la semplicità delle materie, e secondo la facilità del dimostrare. Dee dirsi lo stesso degli altri libri.

7. In terzo luogo trovandosi quasi in ciascuno Elemento alcuna cosa difficile a ben concepirsi, premetto quasi a ciascuno una, o più lezioni, che quella tal difficoltà scemino il più che si puote. Così essendo assai difficile a rettamente concepirsi le linee, i punti, le superficie, come vanno concepite da' Matematici, colla prima lezione minu-

tamente la loro natura si dichiara, e la loro vera esistenza nel senso de' buoni Geometri. In questa stessa lezione si vanno spiegando alcuni vocaboli che nelle cose Geometriche vanno adoperati, e la cui oscurità spesso nuoce agl' intelletti de' giovani. Intesa bene nella prima lezione la natura de' piani, delle linee, e de' punti, si passa nella seconda a dare qualche contezza delle misure, le quali pur debbono adoperarsi da' Geometri per poter in modo intelligibile pronunziar la grandezza delle linee. Spianata così la prima entrata degli Elementi si propongono al solito le Definizioni, poi le dimande, e finalmente gli Assiomi. I Maestri di questa facoltà potranno per loro esperienza attestare quanto spiacevol cosa sia il dar principio agl' insegnamenti Geometrici col pronunziar severamente -- *Il punto è quello, che non ha parte alcuna* -- *La linea è una grandezza dotata di lunghezza, ma priva di larghezza, e profondità* -- ec. A' quali detti pare a' principianti di entrare in un mondo nuovo ed incognito, dove ogni cosa sia favo-

la

la, e sogno. Se dal primo libro passeremo al quinto, ravviseremo, niuna cosa essere in esso più malagevole ad intendersi, quanto la Definizione delle proporzioni, e dell' essere una proporzione somigliante all' altra, una maggiore, un' altra minore di una seconda; e se dal quinto scorreremo al sesto Elemento, troveremo grandissima difficoltà esser riposta nell' intendere la composizione delle proporzioni. Non era adunque conveniente anzi necessario, che con una lezione, in cui qualche sorte d' arte ed eloquenza venga adoperata, queste tali cose s' istillassero nelle tenere menti, e con una giusta insinuazione si facessero in esse penetrare, e posare? Oltre di che molte cose appartenenti all' erudizion Geometrica possono in una lezione insegnarsi, le quali fuori di essa non troveranno luogo così opportuno, e che pure ornano il novello Geometra. A questi intendimenti le lezioni si premettono agli Elementi.

8 In quarto luogo alcuni pochissimi Teoremi o Problemi, i quali di minor

uso sono in tutte le parti della Matematica sull'esempio di altri si tralasciano, e al contrario altri se ne ammettono, che paiono alla Geometria necessarj, e pur sono stati fin'ora tralasciati. E per ometter degli altri, non vi par necessario, che paragonandosi nel primo Elemento i triangoli fra loro uguali, e i casi di tale ugualtà dimostrandosi, o quando due lati, e l'angolo compreso sieno uguali, o quando un lato, e gli angoli adjacenti sieno uguali, si mostri pur tale uguaglianza dall' ugualtà di due lati, e di un' angolo non compreso? Certo che sì; e ciò tanto più, quanto questo terzo caso è più degli altri fastidioso, ed ambiguo. Poichè, come è notissimo, in qualche Ipotesi possono due triangoli aver due lati uguali a due lati, e un' angolo opposto al lato corrispondente uguale, e pure essi non essere uguali, laddove in altra Ipotesi dall' ugualtà di due lati, e di un' angolo opposto, l' ugualtà de' triangoli si deduce. Or non era necessario nella Geometria distinguere, e dimostrar questi casi? Questo esem-

pio

pio vaglia per que' molti, che potrei recare, e che ciascun potrà negli Elementi stessi da per se medesimo rinvenire.

9 In quinto luogo quelle dottrine, e quei metodi, i quali, benchè saldissimi, pur le tenere menti nojano, ed inviluppano, da questi Elementi si son tenuti lontani. Per la qual cosa la dottrina degli ugualmente moltiplici, onde Euclide, e i suoi commentatori anno dimostrato il quinto libro, non si riceve; non già per la poca sodezza di questo metodo, il quale noi siamo pronti a difendere contra le impugnazioni di molti, ma solo per la sua difficoltà, che gli ingegni più che mezzani spaventa. A tal metodo un' altro se ne sostituisce, il quale a me pare più spedito, ed è conforme al sentimento di un Galilei, di un Viviani ed altri autori di grandissimo grido.

10 Un' altra maniera, onde questi Elementi e più brevi, e più agevoli si rendono, è l' uso più frequente de' Corollarj, i quali da' più moderni, e specialmente dal Wolfio sono stati ammessi negli Elementi. Or chi non sa

avere i Corollarj questo vantaggio, che con essi risparmiasi, e una nuova spiegazione, e una nuova costruzione, e la maggior parte della dimostrazione medesima; accadendo tal volta, che con poche parole, che alla Proposizione si aggiungano, dimostrasi un altro Teorema, che a separarlo nuovo apparecchio di spiegazione, e di costruzione richiederebbe. Oltre di che non si ritengono più tenacemente alla memoria quelle verità, che l' una dall' altra come illazion necessaria nasce, e deriva?

11 Gioverà in oltre alla chiarezza massimamente, e sodezza del primo Elemento, l'escluder che noi facciamo dal numero degli Assiomi due Proposizioni, che a nostro giudizio tanto di dimostrazione abbisognano, quanto qualunque altra. Tali son queste due -- *Le linee parallele anno comune il perpendicolo -- Le porzioni in due parallele segate da due altre linee, che sieno ad esse perpendicolari, sono uguali* -- Le quali nel primo Elemento si trovan dimostrate.

12 Queste son le maniere, onde gli

Ele-

Elementi Geometrici si sono resi più agevoli. Che se alcuno sarà, che mi domandi, perchè mai scrivendo io gli Elementi in questo secolo dopo il Wolfio, il Clairaut, il Blaise (a) non abbia seguite molte altre novità, che al lor giudizio è sembrato di dover fare nelle cose geometriche, io risponderò come dianzi, che varj sono i giudizj degli Uomini, che a taluno par conveniente ciò, che ad altri sembra dannoso, e che finalmente queste stesse novità da essi prodotte non piacciono a tutti i geometri, i quali maggior nerbo di raziocinio, e maggior severità negli altri metodi ravvisano, o almeno maggiore abilità, e attitudine a formare un Geometra. I cui sentimenti se io sieguo coi fatti, questo io intendo di fare con infinito rispetto di quegli Autori, dalle cui vestigia mi allontano. Questa stessa ragione mi ha persuaso a volermi discostare dal sentiero del Blaise, e del Deidier, i quali alla Geome-

(a) Nuovi Elementi d'Algebra, e di Geometria a Parigi 1743. in Francese.

tria anno fatto precedere l' Algebra. Poichè io penſo eſſer coſa, dannoſa pe' novelli geometri l' iſtruirli nell'Analiſi prima che eſſi alla Sinteſi abbiano avvezzato, e dimeſticato lo ſpirito. E perchè non paja ſtravagante e contrario al guſto de' moderni ſtudj queſto mio conſiglio io, lo confermerò coll'eſempio de' più eccellenti e riſpettati autori. Il Signor Nevvton ſecondo la teſtimonianza, che ne fà il Pemberton (*a*) ſuo commentatore ſpeſſo diceva, diſpiacergli oltre modo, che ne' principj de' ſuoi ſtudj Matematici era paſſato troppo preſto alla lettura della Geometria Carteſiana, e de' trattati Analitici de' moderni. Il Signor Wolfio è di avviſo, che allora quando per coltivare il ſuo ſpirito, e acquiſtare una certa dirittura di ragionare, taluno ſi dà allo ſtudio delle coſe Matematiche, dee molto amare le dimoſtrazioni al modo di Euclide, e che le dimoſtrazioni Analitiche poſſono eſſe certamente in alcun mo-

(*a*) In Præfatione ad conſpectum Philoſophiæ Nevvtoni.

modo condurre a questo fine ma la sintesi più agevolmente, e più sodamente a tal fine ci conduce. Aggiugne, sembrare non molto fondati alcuni raziocinj, che noi troviamo in qualche scritto del Cartesio e dell'Ermanno. Il che non sarebbe, se essi avessero avuto la sintesi in maggior uso; non doversi riguardar come cosa puerile, ciò che si dice in favore del metodo degli antichi, poichè i più grandi intelletti avriano assai più vantaggiosamente fatto, se essi si fossero adattati, e accostumati meglio a quel metodo di ragionare. Questi sono in sostanza i sentimenti del Wolfio con più ampie, e lunghe parole dichiarate nel quinto tomo de' suoi Elementi matematici al capo secondo. Il Signor Fermat in una lettera scritta ad uno erudito Inglese, ed inserita nelle opere matematiche del Wallis (1) domandando lo scioglimento di un certo Problema secondo il metodo di Euclide, e independentemente dall'Analisi

(1) Pag. 859. Editio Oxon, 1699.

afferma, che a far così lo costrigne il timore, che insensibilmente non si lasci perire l'eleganza della costruzione, e di quelle dimostrazioni, onde gli antichi erano così gelosi. A queste testimonianze non sarebbe difficile aggiugnerne delle altre di più moderni, se io non pensassi valere al mio intendimento le già recate, ed essere i migliori autori de' nostri tempi bastevolmente di tal verità persuasi. Non sia però, chi creda, che io voglia perciò punto togliere al merito dell'Analisi, la quale a gran cose ci vale, e gran fatica ci risparmia; ma essa dee ne' suoi tempi, e colla debita moderazione essere adoperata; nè può essere bene adoperata, se non da coloro, a quali siano già divenute familiari le costruzioni, e le dimostrazioni sintetiche. Si dia dunque il primo luogo alla costruzione, e alla geometria degli antichi, si lasci che questa fabbrica faccia il suo sedimento, e diventi soda, e robusta, dopo di che si potrà sicuramente innalzare l'elevatissimo edifizio dell'Analisi.

13 L' ultima diligenza da me usata

in

in questi Elementi si è l' esporre alcuni saggi de' molti usi, che le proposizioni Elementari somministrano alla Geografia, all' Ottica, alla Catottrica, all' Astronomia, alla Fisica, alla Meccanica. Della qual cosa tante, e sì chiare sono le ragioni, e i vantaggi, che agli occhi di tutti da per se appariranno. Imperocchè per lasciar ora da parte, che questa inamena via degli Elementi si rende così amena, e gioconda, e che molte, e varie erudizioni vanno intanto imparando quei giovanetti, che lodevolmente si vogliono fino da primi anni in questa facoltà ammaestrati; quanto coraggio, e animo piglieranno in questo cammino i novelli Geometri, vedendo, e conoscendo praticamente, a quanto grand' uso giovi, e a quanto grandi opere si sollevi di repente quel tal Teorema, che essi al primo aspetto avriano giudicato inutile, e vano? Cesseranno quegli antichi lamenti di noja, e di disperazione ripieni. A che val ciò? Che pro di questo Teorema? Che ho a far io con questi angoli, e triangoli, e archi in breve carta ri-

stret-

ſtretti ? Ecco a che vale ; a fornirvi d' armi baſtevoli a grandiſſime intrapreſe , e malagevoli . Certamente chi il crederia , ſe ſotto gli occhi nol vedeſſe dimoſtrato, poterſi coll' uſo di alcuni ſempliciſſimi Teoremi Elementari, e miſurare le terreſtri latitudini, e livellare qualunque punto terreſtre, e ſpiegare la cagione del fluſſo , e rifluſſo maritimo , e miſurare le vie de' raggi orizzontali dentro la terreſtre atmosfera , e determinare la grandezza della terra medeſima , e rinvenir la miſura delle forze centrali, e cento altre opere di ſimil maniera ? Certamente niuno ; e molti forſe ſaranno , che fatto lo ſtudio degli Elementi , credono di non avere altro imparato , che a dirittamente procedere ragionando . Quanto animoſi adunque e a proſeguire l' intrapreſo viaggio , e ad intraprenderne de' nuovi diventeranno coloro, i quali ora una Propoſizione Elementare , ora un' altra trapaſſando , veggono avanti agli occhi aprirſi dilettevoliſſime pianure di rare , e pellegrine piante arricchite ? E quanti ſono ſtati , i quali

nuda,

nuda, ed aspra, e stretta provando questa via si sono smarriti, e dall' intrapreso cammino rimasti? Oltre di che grandissimo ajuto dee recare alla memoria l' unione, e legame della Proposizione Elementare, e dell' uso, che essa ha praticamente. Poichè destrandosi l' idea dell' uso pratico più facilmente, che qualunque altra dee avvenire, che essa, risvegli la sua compagna, con cui è strettamente legata, cioè l' idea della proposizione medesima. Ma che dirò io, che questa maniera di Elementi è a dì nostri non utile solo, ma necessaria? Imperocchè abbiamo oggi noi per nostra gran ventura una Fisica, la quale colle linee, cogli angoli, co' cerchj, con infinite altre curve si è sì fattamente dimesticata, quanto la medesima geometria, anzi assai più. Poichè la geometria colle superficie, e colle linee niente altro rappresenta, che l' estremità di un solido o l' estremità di una superficie, laddove la moderna Fisica per le stesse linee, o superficie, ora i tempi, ora le velocità, ora le forze de' corpi, ora gli

gli ſpazj, ora le reſiſtenze, ora le preſſioni, or le percoſſe rappreſenta, ed eſprime, deducendo così, ora chiariſſime ſpiegazioni di coſe recondite, ora eſattiſſime miſure delle affezioni, e proprietà de' corpi, le quali coſe all' apparenza pajono impoſſibili. Ma un tal uſo, ed applicazione della Geometria è così difficile, e pericoloſo, che ſupera nella difficoltà la Geometria medeſima. Il che io diſpererei di poter dimoſtrare, ſe io non parlaſſi a dottiſſime perſone, che anno da ſe queſta difficoltà ſperimentata. Non ſi è contraſtato già per più di un mezzo ſecolo, e ſi contraſta tuttavia tra i Leibniziani, e Carteſiani, tra Tedeſchi, e Franceſi ſulla miſura delle forze vive? E chi è ſtato, che ha sì lungamente tenuti ſoſpeſi gli animi di così eccellenti Geometri, ſe non che la difficoltà di applicar giuſtamente, e legitimamente la Geometria alla miſura di tali forze? Ora eſſendo tale, e tanta difficoltà riposta nell' applicazione legitima delle figure Geometriche alla Fiſica, par neceſſario che coloro, i quali

a que-

a questo studio crescono, e per esso sono allevati, si avvezzino da' primi anni a concepir giustamente sotto alle linee quasi sotto simboli, quelle stesse, o velocità, o forze, o spazj, o raggi visuali, o altra simil cosa, da cui dipende l'intelligenza, e lo studio della Fisica. Non è oggi l' Italia di questa Fisica invaghita e presa? Non si sente in ogni angolo il nome della moderna Fisica risuonare? Bisogna adunque ogni arte, ed industria, e fatica adoperare per preparare l' animo de' Giovani a così difficile, e sublime facoltà. Il che per me in questi Elementi, per quanto essi comportano s' intende di fare. Negli usi, o applicazioni delle proposizioni quale ad una, e quale ad un'altra facoltà, si è procurato di serbar queste tre leggi. La prima, che gli usi sien tali, che dal supposto Teorema soltanto, o da quelle, e insieme dalle antecedenti proposizioni solamente dipenda. La seconda, che ove sarà bisogno si premettano alcune notizie necessarie per la perfetta intelligenza dell' uso. La terza, che ove quell' uso avesse più

par-

parti, alcuna delle quali non naſca dagli Elementi, queſta ſi tralaſci. Le quali coſe ſono tutte indirizzate a far sì, che il novello geometra tutto poſſa comprendere, e imparare, benchè niuna contezza abbia di quelle facoltà, cui ſerve la Geometria. Queſte ſteſſe condizioni, che io ho dovuto imporre a me ſteſſo in queſta parte, mi anno reſa nojoſa queſta fatica aſſai più, che non appaja. Poichè un tal uſo mi ſi preſentava più bello, e più plauſibile, ma che ſoprovanzava la capacità de' principianti; un tal altro era a' principianti adattato, ma aveva biſogno di lunghe ſpiegazioni, e premeſſe. Nella eſpoſizione ſteſſa degli uſi biſognava per amor di chiarezza, che io mi teneſſi lontano da alcune formole uſate da' profeſſori in quelle particolari materie, ma dall' altro canto io temeva d'introdurre così una nuova forma, e diſuſata di parlare, che deve nojare i Matematici. Mi è tal volta avvenuto di aver fatta la ſcelta di qualche uſo, che a me pareva a propoſito, ma poi riguardando il ſucceſſo, che eſſo aveva

ne' miei ſcolari, mi ſono avveduto, che eſſo era troppo aſtratto, troppo rimoto dalle loro notizie, poco intereſſante, e d'ingombro più toſto, che di giovamento. In ſomma io dico, che ho ſoſtenuto fin'ora una noja, ed un faſtidio, che non è piccolo; che la ſcelta, ed eſpoſizione di tali uſi è una coſa aſſai ambigua, ed ingannevole; che chi ſi trovaſſe poco contento di queſta piccola impreſa, faccia così, vi ſi provi egli, e per amore del pubblico bene ſoſtenga anch' egli qualche poco di queſta nojoſa fatica. Avendo io inoltre oſſervato, che alcuni ſono (e ſon certo pochiſſimi) i quali dalla dirittura del raziocinio geometrico ſono baſtevolmente adeſcati, e par loro di divertire dal diritto cammino, ſe agli uſi delle Propoſizioni rivolgano il penſiero, ho giudicato di collocare i ſopradetti uſi di ciaſcun Elemento al fine degli Elementi; affinchè tali uſi non interrompano il diritto ſentiero della Geometria, e poſſan valere per chi ne abbiſogna a riprender nuovo coraggio, e per chi vuole fornirſi di varie dot-

tri-

trine, che veramente alla ſteſſa Geometria non ſi appartengono.

14 Ma che ſtò io a ragionare sì lungamente di ciò, che da voi perfettamente dalla lettura degli ſteſſi Elementi, ed uſi ſarà compreſo? Vi prego pertanto a voler benignamente accogliere qneſta mia qualunque fatica. Poichè, ſe niuna opera quantunque eccellente può eſſer tale, che preſa con malignità, e con animo avverſo non poſſa eſſere gravemente biaſimata, molto più ciò ſarà della mia, nella quale io niuna eccellenza ravviſo, ma ſol tanto qualche abilità, e ſufficienza per giovare, ed ajutare la gioventù, come la mia ſteſſa ſperienza mi ha inſegnato.

L E-

LEZIONE I.

1. *Del vocabolo, e dell' origine della Geometria.* 2. *Delle primarie divisioni della Geometria.* 3. *Che sia solido, superficie, linea, punto. Come queste sien cose reali.* 4. *Che le figure Geometriche siano adoperate per rappresentare o simbolicamente, o scientificamente assaissime cose.* 5. *Che sia presso a' Geometri il Problema.* 6. *Che sia Teorema, e proposizione.* 7. *Che sia costruzione, e Corollario.* 8. *Quali e quanti sieno i principj della Geometria.*

1 QUesto vocabolo *Geometria* preso nella proprietà del suo significato vuol dire misura della terra, ed è formato, o composto da due voci greche γῆ, che significa terra, e μετρεῖν, che significa misurare. La necessità, che gli uomini anno avuta di misurare, e distinguere le varie parti, e luoghi della terra, per così determinarne i confini, avrà certo dato motivo all' invenzione delle regole di questa facoltà, che io prendo a spiegare. Indi sarà stato, che scuoprendosi così dall' umano intendimento la bellezza, la profondità, l' eccellenza, l' utilità di quest' arte, molti si siano ritrovati, che l'abbiano coltivata, ed accresciuta. In tanto questa scienza, benchè in tutt' altro s' impieghi, che nelle terrestri misure, ha ritenuto quel nome, che la sua prima origine le impose.

pose. Che tal sia la nascita di questa facoltà lo attestano Strabone (*a*), ed Erodoto (*b*) i quali concordemente asseriscono, che le annue inondazioni del Nilo furono quelle, che astrinsero gli Egiziani a questo studio. Imperocchè portando via questo gran fiume qualunque limite, e segno delle terre, e delle possessioni de' privati, e ricuoprendo la faccia di quel vasto Paese di uguali strati di terra, costrinse il popolo a valersi della misura delle figure, e grandezze de' loro terreni, per riconoscerne i confini. Se poi gli Egiziani sieno così stati i primi inventori di quest'arte, come vogliono i due citati Storici, o vero gli Ebrei, come Giuseppe Ebreo par, che pretenda, o vero Mercurio Thot, come insegna Polidoro Vergilio (*c*) si vuol lasciare all'esame de' Critici.

2 La Geometria per tanto nel nostro significato, se generalmente si prenda, niente altro è, che la Scienza o la dottrina delle cose, che anno estensione; ed estensione avendo le linee, le superficie, i solidi, essa è la scienza, che nella contemplazione, e considerazione di tali estensioni si aggira. Dividesi essa primieramente in quattro specie, cioè in *Planimetria*, che significa la misura de' piani, in *Altimetria*, che significa la misura delle altezze,

(*a*) Lib. XVII. (*b*) Lib. II.
(*c*) De Invent. rerum lib. 1. cap. 8.

tezze, in *Longimetria*, che ſignifica la miſura delle coſe lontane, in *Stereometria* che ſignifica la miſura de' ſolidi. A queſti Elementi, che voi cominciate a ſtudiare appartiene ſoltanto la prima ſpecie, cioè la *Planimetria*, o la conſiderazione de' Piani, o delle Superficie piane. Divideſi in oltre in Teoretica, e Pratica. La prima contempla le proprietà de' piani, la ſeconda trae quella contemplazione agli uſi dello ſcioglimento de' Problemi. La Teoretica ſuol partirſi in *Elementare*, che riſtrigne ſe ſteſſa nella conſiderazione delle linee rette, delle ſuperficie piane, e de' ſolidi, che indi ſi generano, ed in *Sublime*, che oltrepaſſa alla conſiderazione delle linee curve, e de' ſolidi da eſſe generati. Voi intanto pago di ſapere ſoltanto queſte diviſioni, limiterete per ora i voſtri ſtudj alla Planimetria ſpecolativa, ed Elementare, riſerbando l' altra ad altri tempi.

3 Converrà adunque in queſto primo paſſo del voſtro viaggio, che voi chiaramente apprendiate, che ſia mai queſta Geometria Piana, a cui vi avviate. E per chiaramente concepir ciò, biſognerà che voi eccitiate in voi una chiara idea del ſolido, della ſuperficie, della linea, del punto. Io vi preſento in mano un corpo (*) in forma di un dado, il quale avrà tre eſtenſioni, la lunghezza rappreſentata dalla linea O P, la larghezza rappreſentata dalla linea Q R, la pro- * Tav. I. Fig. I.

fondità rappresentata dalla linea MN. Ora questo corpo dotato di queste tre estensioni, noi chiameremo *Solido*. Queste tre estensioni son cosa vera, e reale. Poichè pigiando voi fortemente con due dita applicate alle due parti M, N questo corpo, esse resteranno tra di loro lontane, nè si toccheranno giammai. Dunque essendo reale lo slontanamento MN di queste vostre dita, la profondità non sarà cosa sognata, e fantastica, ma vera, e reale. Lo stesso dicasi della lunghezza OP, e larghezza QR. Onde queste tre estensioni, cioè questa solidità sarà real cosa, e verissima. Ora la profondità di tal corpo non sarà essa terminata dalla Superficie ADCB? e questa Superficie sarà forse profonda? Nò certamente. Poichè se lo fosse, non sarebbe il termine della profondità, ma sarebbe profonda essa stessa, cioè sarebbe un Solido. Dunque convien, che questa Superficie, chè è termine di profondità, non sia essa profonda. In oltre questa Superficie stessa ADCB è terminata da quattro linee, ciascuna delle quali v. g. AB, essendo termine della larghezza, non sarà larga, ma avrà lunghezza soltanto, e questa sarà appunto la linea. Finalmente questa linea, che ha lunghezza, avrà anche termine di lunghezza, e questo termine della lunghezza non sarà lungo, e questo è il punto. Adunque il Solido, la Superficie, la linea, il punto saran cosa vera, e reale. Ditemi. Non

toc-

toccate voi veramente questo dado? Certo che sì. Ma toccate voi forse la sua profondità? Il vostro dito si compenetra forse con esso? Nò certamente. Sicchè la Superficie, che sola voi realmente toccate, sarà cosa reale. Nè certo su cosa fantastica può farsi azione alcuna realmente. Se per tanto questi nostri terrestri corpi abbiano vera continuità di parti, come il più de' Filosofi insegna, tutto questo raziocinio proverà, che questi corpi nostrali avranno vera superficie, vere linee, e veri punti. Fin quì le Superficie potranno essere o curve, o piane. Ora immaginatevi, che una qualunque linea curva si adatti, e combaci con quella Superficie, ed essa diventerà Superficie curva. Poi fingete, che una linea diritta sia quella, che da per tutto si adatti, e combaci con essa, e la Superficie diventerà Piana. E poichè questi Piani possono esser terminati diversamente da più, o meno linee, da linee diritte, o da curve, tutti gli abbraccia la Geometria presa universalmente, ma la nostra Elementare si ristrigne soltanto a' piani terminati, o da linee diritte, o da linee circolari.

4 Inteso, che ben vi abbiate la natura, e l'esistenza de' solidi, delle superficie, delle linee, e de' punti, oltrepassiamo alle cose, le quali per essi possono rappresentarsi, e simboleggiarsi. In due maniere le linee, e le figure geometriche possono adoperarsi, e

ſono ſtate adoperate di fatto. La prima è quella degli Egiziani, i quali le loro nozioni o Filoſofiche, o Teologiche erano ſoliti di eſprimere per linee, e figure di Geometria. Per eſſe rappreſentavano le operazioni divine, ed umane, le generazioni, le diſtruzioni, le mutazioni de' corpi (*a*). Tra tutte le figure affettavano i cerchj, ed i triangoli. Co' cerchj Hermete rappreſentò la Divinità. Ma queſta prima maniera o è affatto ideale, e ſimbolica, o ſe in alcun modo eſprime la coſa rappreſentata, non la eſprime ſcientificamente, cioè non la eſprime in modo, che dall' eſpreſſione medeſima ſe ne poſſano arguire legittimamente le proprietà ignote di ciò, che vien eſpreſſo. Queſta ſeconda maniera era riſerbata a' ſoli Geometri, e non mai è ſtata meſſa in opera tanto, quanto nella moderna Filoſofia. Imperocchè tutte affatto quelle coſe, che ſono capaci del più, e del meno, o ciò ſia di durata, come è nel tempo, o ciò ſia di attività, come è nella forza, nella velocità, nelle preſſioni, ed altre ſimili coſe, tutte per linee, per piani, per ſolidi ſono ſtate ſcientificamente rappreſentate, cioè rappreſentate per modo, che ſe ne deducano ignote conſeguenze. E' ovvio l'eſempio della Muſica, nella quale

(*a*) Come prova Gale Philoſ. Gener. lib. 2. cap. 2. Kircher. Oedip. Aegipt.

quale abbiamo imparato a rappresentar per linee le corde, che fanno consonanza. Due corde che faccian quella consonanza, la qual dicesi ottava noi le esprimiamo per due linee, delle quali l' una sia doppia dell' altra. Dalla divisibilità delle linee noi ricaviamo, che siavi differenza tra l'ottava, e tre ditoni, la qual differenza per altro è insensibile agli orecchi più armonici. Indi ancora argomentiamo, che la lunghezza di una corda scemandosi a poco a poco all' infinito, abbia a fare un numero infinito di differenti suoni in essa contenuti, ed alla Musica giovevoli, de' quali ogni acuta orecchia non può affatto sentirvi differenza tra l' uno, e l'altro de' suoni contigui. Da questa scientifica rappresentazione voi ricaverete, quanto ampiamente la Geometria stenda il suo regno, quanto essa giovevol sia a determinar quelle cose, che possono soggiacere a misura, e ancora quanto essa sia necessaria, se voi vorrete applicar l'animo alla moderna Fisica.

5 Scorrendo voi questi Elementi leggerete questi vocaboli di *Problema*, *Teorema*, *Proposizione*, *Costruzione*, *Dimostrazione*, il cui significato, o non essendo ovvio nel comun parlare, o avendo presso a' Geometri altra forza, che non ha nel mestier civile, è alle volte o di oscurità, o di error cagione nell' immaginazione di alcuno; e da oscurità, o errore noi dobbiamo in questa facoltà tenerci lontanissimi. E' dunque ben fatto, dichia-

rare apertamente qual significato abbian questi vocaboli ad un per uno nel vocabolario de' Geometri. *Problema* adunque, benchè nel linguaggio o Dialettico, o Cittadinesco significhi alcuna cosa, di cui per il sì, e pel nò congetturalmente, e ambiguamente discorresi, tuttavia nel linguaggio nostro significa, una tal operazione, e raziocinio, che è dirizzato a far qualche cosa praticamente. Così, ove si tirino tali linee, e tali cerchj intorno ad una linea terminata da ambe le parti, per le quali linee, e cerchj, ne verrà fatto di descrivere un triangolo di lati uguali, e di lati uguali esser quel tal triangolo evidentemente si concluderà, una tal' operazione, e discorso a tal opera inteso, è un Problema.

6 Ma per contrario una tal operazione, e raziocinio, che solo intende di far chiara, e palese una qualche proprietà, o passione di una o più quantità della tale, e tal figura, chiamasi *Teorema*, appunto perciò, che nella contemplazione di quella verità si posa. Così, ove tirate le tali linee intorno a un triangolo di lati uguali, con chiaro raziocinio si palesi, in quel triangolo, e in qualunque altro di lati uguali tutti tre gli angoli essere uguali, quest'artifizio, e raziocinio sarà un Teorema. Tanto il Problema, che il Teorema con vocabolo di *Proposizione* vien significato.

7 In ciascuno o problema, o teorema vi

è, o

è, o si suppon fatta la costruzione, la qual è una tal operazione (Che aggirasi in condur linee, cerchj, mezzi cerchj, segar angoli, segar linee, segar piani), quale o a dimostrare la proposta proprietà della figura, o a condurre a fine quell'opera è ricercata. Questa costruzione dicesi ancor *Sintesi* Greco vocabolo. Tanto la voce *Costruzione*, che la voce di *Sintesi*, alcune volte più largamente presa, e contrapposta all'*Analisi*, o sia calcolo letterale, significa quello stesso, che *Geometria*. Così dicesi nn Problema sciolto per Sintesi, o per Analisi, sciolto per costruzione, o per calcolo, e allora vuolsi significare, il tal problema essere sciolto, o coll'uso della pura Geometria, o con qualche uso di Geometria, e insieme di calcolo letterale.

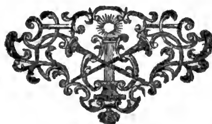
8 La costruzione è sempre seguita dalla Dimostrazione, che è una evidente ragione, onde concludesi, o esser vero il proposto Teorema, o esser fatto il Problema cercato. Alcuna volta la dimostrazione è seguita da uno o più Corollarj. *Corollario* altro non è, che o un Teorema, o un Problema, che si deduce dalla costruzione, e dimostrazione della Proposizion primaria. De' Corollarj, e delle Dimostrazioni, molte son le maniere, delle quali non è quì tempo di parlare, ma tutte, e ciascuna di esse posa, e sostiensi sopra alcuni principj Matematici, che sono di questa macchina elementare il fondamento.

9 Di

9 Di tre maniere sono questi Principj. Nella prima maniera ripongonsi le Definizioni, le quali da altri, *Supposizioni* si chiamano, e sono dichiarazioni dei vocaboli proprj di questa facoltà. La seconda maniera contiene le *Petizioni*, o con altro vocabolo *Postulati*, co' quali si domanda di fare alcuna operazione, la quale esser possibile, e fattibile ciascuno si persuade. Dimanderò di poter condur una linea, descrivere un cerchio, e simil cosa, la quale è possibile, e a farsi assai piana. L'ultimo, e terzo genere abbraccia gli *Assiomi*, che altrimenti diconsi *Nozioni comuni*, e Ciceron chiama *Pronunciata*, ed *Effata*. Gli Assiomi sono verità notissime a tutti, e a cui niuno, che intenda la forza delle parole, può non acconsentire. Or da questi tenuissimi principj, i quali sono a ciascun uomo rozzo, e volgare, notissimi, e non possono non esser noti ad uomo alcuno, la Geometria s' avanza, e si fa oltre a Teoremi remotissimi dall' uman credere, e tal volta falsi all' apparenza, i quali però essa con mirabil ordine, e chiarezza conferma, e dimostra. Il che di quanta lode sia di questa facoltà, chi è, che nol conosca? Eccovi dichiarato. 1. Che significhi propriamente *Geometria*, e qual sia l' origine di questa facoltà. 2. Quali sieno le sue divisioni. 3. Che sia solido, superficie, linea, punto. Come queste sien cose reali 4. Che le figure di Geometria sono ado-

perate

perate ſimbolicamente , e ſcientificamente . 5. Che ſia Problema . 6. Che Teorema , e Propoſizione . 7. Che coſtruzione , e Corollario . 8. Quali , e quanti ſieno i principj Geometrici.



LEZIONE II.

1. Che sia misura. 2. Che sia divisione, e quantità della misura. 3. Qual sia la divisione, e grandezza del Piè Parigino. 4. Quale la divisione e grandezza dell' antico Piede Romano. 5. Quale la divisione, e grandezza del Braccio Fiorentino da Panno. 6. Quale la divisione in parti decimali.

1 A Questi Elementi i quali, da alcuni usi pratici saranno interrotti, e framezzati, è necessario premettere alcuna notizia delle misure, delle quali niuna cosa essendo più intrigata, e discordante, bisogna ordinatissimamente e brevemente trattare. E prima dirò che sia misura. *Misura è una quantità minore, la quale alcune volte presa adegua, ed esaurisce una quantità maggiore.*

2 Nella misura due cose vanno considerate e distinte. Prima la divisione di essa, poi la sua quantità. La divisione della misura son le parti in cui la prima misura dividesi; la quantità è l' estensione della misura medesima. Tanto la divisione, che la quantità della misura è cosa così varia presso diverse Nazioni, e Popoli della terra, che niuna cosa può essere più varia, e discordante. Di questa varietà, e discordia, quando occorresse, le necessarie notizie troverete

nello

nello Snellio (*a*) nel Riccioli (*b*) nel Malleto (*c*) nel Dechales (*d*) nell' Heisenschmidio (*e*) nel Mersenno (*f*) nel Nevvton (*g*) nel Graves (*h*) e finalmente in Eduardo Bernard (*i*) e in molti altri. Per ora vi basterà di apprendere, qual sia la divisione e quantità del Piè Parigino, quale la divisione e quantità dell' antico Piede Romano, e finalmente, quale la divisione e grandezza del nostro Fiorentino Braccio. Io prendo a dire delle due prime misure per esser queste le più celebri di tutte le altre, e della terza, perchè essa è, più che qualunque altra, in uso appesso di noi. Col piè Parigino è stata fatta la misura del grado terrestre dal Piccard, da' due Cassini, dal Maupertuis, dal Clairaut, dal Bouguer, dal de la Condamine; ed in questo piede e sue parti vengono espresse molte grandezze, delle quali trattano i migliori Autori di Fisica, di Geografia, di Astronomia. La conoscenza del piede antico Romano non solamente è necess-

---

(*a*) Eratosthenes Batavus lib. 2. cap. 1.
(*b*) Geograph. Refor. cap. 3. 4. 5. 6. 7.
(*c*) Geometrie pratique lib. 1. pag. 108.
(*d*) Geometriæ practicæ lib. 1. pag. 154.
(*e*) Nova disquisitio de ponderibus & mensuris veterum Rom. Græc. & Hæbr. sæc. 3. cap. 1. pag. 93.
(*f*) Nel suo Trattato de mensuris.
(*g*) Nella sua Dissertatione de Sacro Judæorum cubitu opusc. tom. 3. pag. 493.
(*h*) De pede Romano.
(*i*) De mensuris & ponderibus antiquis.

necessaria all' intelligenza delle misure degli antichi itinerarj, e dell'antica Geografia, ma eziandio alla correzione, e verificazione della moderna. Il che non vi parrà punto strano, se riguarderete la bellissima Analisi Geografica dell'Italia del Signor D'Anville (*k*). Questo accurato geografo, dopo di avere diligentemente determinati per le celesti osservazioni de' più rinomati Astronomi alcuni luoghi principali dell'Italia, protestò di non aver trovato più giusto metodo per la determinazione degli altri, fuori di quello, che le distanze reali delle tavole Peutingeriane, e di Antonino gli apprestavano.

3 Adunque il piè real Parigino, al quale io riferirò le altre misure, dividesi in 12 parti, le quali chiamansi *dita*, *o pollici*, ed in Francese *Pouces*. Ciascun di queste dita dividesi altresì in altre dodici parti, le quali diconsi *linee*. Ciascuna di queste linee suol dividersi in altre 10 particelle. Onde l'intero piede conterrà 144 linee, e 1440 di dette particelle. E ciò quanto alla divisione, la quale a' moderni piedi è quasi comune. Così il Piè di Londra, lo Svedese, il Renano dividonsi in dita, e poi suddividonsi in linee, e alcune volte in particelle decime di linea. Perchè della estension di questo piede abbiate una idea giustissima, potrete riguardare

(*k*) Analyse Geog. de l'Italie, Paris an. 1744.

dare le ſquadre, o regoletti di ottone, che vengono di Parigi, ne' quali troverete inciſa la giuſta lunghezza di un mezzo piede. Quando tali ſtrumenti vi mancaſſero, potrete riguardare la figura ſeconda, la quale alla meglio vi moſtrerà la lunghezza di un mezzo piè Parigino colle ſue diviſioni. Se un foglio fragile, al qual raccomando queſta lunghezza, non foſſe ſoggetto ad allungamenti, ed accorciamenti, che in eſſo produce sì il diverſo ſtato ora più, ora meno umido della noſtra atmosfera, sì l' impreſſione medeſima, e il tormento della carta, ſarebbe da tener più conto di queſta miſura, la quale io vi ſomminiſtro, come poſſo. Tav. I. Fig. II.

4 La ſteſſa diviſione in 12 parti è pure adoperata nel piede antico Romano, che alcuni chiamano Piè di Veſpaſiano. Ciaſcuna di queſte parti chiamavaſi *Uncia*, oncia, o vero *digitus craſſus* dito groſſo. Ciaſcuna di queſte once per maggior eſattezza dividesi dal Riccioli (*a*) in 100 parti, con diviſione ideale. E' incredibile, quanta ſia la diverſità delle opinioni ſulla ſteſa, o lunghezza di tal piede; e ſopra di eſſa più diſſertazioni da graviſſimi autori ſono ſtate ſtampate. La diverſità di tali opinioni naſce dalla diverſità de' Monumenti, da' quali ricavaſi l'eſtenſion di queſto piede; e tutta la criti-

(*a*) Geog. Refor. lib. 2. cap. 7.

critica per la verificazion di questo piede deve aggirarsi sulla scelta degli antichi Monumenti, che sieno più decisivi di questo fatto. A cinque diverse specie possono ridursi tali monumenti. Alla prima appartengono i piedi scolpiti nelle lapide, o ceppi sepolcrali. Alla seconda i piedi scolpiti in ferro, o bronzo avanzati all'antichità. Alla terza le distanze de' luoghi nominati negli antichi itinerarj, ed esistenti a dì nostri. Alla quarta il celebre Congio Farnesiano. All'ultima finalmente le distanze Milliari. Ora di queste cinque maniere di monumenti le prime quattro sono soggette a grandissime eccezioni, come lungamente potrei far manifesto, se quì fosse a proposito di farlo. Per la quinta specie, cioè per le distanze Milliari vien determinata la grandezza del piè Romano di 1306 particelle, dieci delle quali fanno una linea del piè Parigino, sicchè il piede sarà di 10 pollici, 10 linee, e 6 decime di linea dello stesso piede. Le ragioni, onde il piè vien così stabilito, son le seguenti. Noi sappiamo che l' antico miglio Romano componevasi di 1000 passi, che chiamavansi *Geometrici*; sappiamo in oltre, che ciascuno di questi passi conteneva 5 piedi Romani, onde, che un miglio era composto di 5000 piedi. Se dunque ci riuscirà di ritrovare una distanza reale di un miglio antico, la cinque millesima parte di tal distanza somministrerà l'ostensione di un piede. Il Signor Marchese

chese Maffei nel suo viaggio per la Francia (*a*) accuratamente misurò un' antico miglio terminato da due colonne milliari nella via, che conduce da Narbona a Nimes, e secondo tal misura torna il piede di 1306 particelle. Lo stesso miglio fu poi misurato dal Signor Astruch, il quale lo ritrovò alquanto minore, e sapendo la misura fatta dal Maffei, a lui si argomenta di attribuire l'errore. (*b*) Ma le osservazioni fatte da Monsignor Bianchini, la cui accuratezza è ben nota agli eruditi, confermano evidentemente la misura del dotto Veronese. Imperocchè quel celebre Astronomo, e Geografo, non uno, ma più miglia contrasegnate colle colonne Milliari, ed esistenti nella via Appia, che da Roma conduce ad Albano, misurò diligentemente, e paragonò l' uno coll'altro. Dal qual paragone egli ricavò, che appunto facendo il piede Romano di 1306 particelle; queste miglia tornavano di 5000 piedi. (*c*) Ora se si considera, che queste miglia erano con autorità pubblica da Romani misurate; che esse sono vicinissime a Roma, e che per ciò esser doveano di esattezza maggiore; che sono state da un così valente Uomo esaminate, e l'uno all'altro pa-

(*a*) Galliæ Antiquitates Pag. 34.
(*b*) Memoires de l' Hist. Natur. de la Linguadoc.
(*c*) Nella Prefazione delle sue Osservazioni Astronomiche stampate per opera del Sig. Manfredi in Verona l'an. 1737.

ragonate; si converrà, che non abbia eccezione alcuna quest'ultimo metodo, e che con ogni sicurezza potrà fissarsi tal piede, come è stato per noi determinato, e come nella fig. 3. si rappresenta.

Tav. I. Fig. III.

5 Se tanta fatica si sostiene per accertarsi della grandezza delle straniere, ed antiche misure, perchè non abbiamo noi ad impiegar qualche pensiero per le misure moderne, e nostrali. Due braccia sono state in uso presso i vostri maggiori; le quali qualche autore malamente confonde. Il primo essi chiamarono *braccio da terra*, il quale essi nelle misure de' terreni, e nelle cose geografiche adoperavano. Il secondo chiamarono *braccio da panno*, perchè appunto nel commercio, e nella stima de' panni era usato. Oramai a giorni nostri questo secondo braccio è sì comun divenuto, anche nelle misure terrestri, che il primo è quasi disusato. Pertanto questo braccio da Panno dividesi in 20 soldi, e ciascun soldo in 12 piccioli. Nella sua grandezza i geografi discordano assaissimo. Imperocchè secondo lo Snellio sarebbe di particelle Parigine 2609, secondo il Riccioli di particelle 2550 (*a*), secondo il Piccard di 2580 (*b*). Quest'ultima

(*a*) Geographia Refor. Lib. 2. cap. 7. pag. 45.
(*b*) Appresso il Cassini nella Suite des Mem. l'ann. 1718. Pag. 346. Ediz. d'Amsterdam.

ma grandezza è la giusta, come ultimamente è stato ne' pubblici modelli ritrovato. Di questo braccio una quarta parte vi presenta la fig. 4. colle sue divisioni ne' soldi, e piccioli competenti. Per la notizia delle altre misure straniere io aggiugnerò una tavoletta, nella quale la loro grandezza venga espressa in particelle Parigine, e in soldi, e piccioli del Braccio Fiorentino.

Tav. I. Fig.IV.

RAPPORTI DI MISURE ESTERE

ALLE PARIGINE, E FIORENTINE

Differenti misure	Estere	Parti del Piè Parigino	Soldi	Picciolì	Frazioni di P.
Piede	Romano	1306.	10.	1.	$\frac{21}{43}$
	Greco	1360.	10.	6.	$\frac{22}{43}$
	Macedonico	1567.	12.	1.	$\frac{33}{43}$
	Di Londra	1351. $\frac{2}{3}$	10.	5.	$\frac{29}{43}$
	Del Reno	1392.	10.	9.	$\frac{28}{43}$
	Spagnuolo	1240.	9.	7.	$\frac{15}{43}$
	Parigino	1440.	11.	1.	$\frac{41}{43}$
	Di Bologna	1682.	13.	---	$\frac{20}{43}$
	Di Leida	1390.	10.	9.	$\frac{13}{43}$
	Di Svevia	1316.	10.	2.	$\frac{18}{43}$
	Di Danzica	1272.	9.	10.	$\frac{14}{43}$
	D'Amſterdam	1252.	9.	9.	$\frac{1}{43}$
	D' Aliprando	1870. $\frac{1}{2}$	14.	6.	--
Palmo	Di Napoli	1169.	9.	---	$\frac{32}{43}$
	Genoveſe	1113.	8.	7.	$\frac{23}{43}$
	Di Palermo	1073.	8.	3.	$\frac{35}{43}$
	Romano.	990.	7.	8.	$\frac{4}{43}$
Piede	Naturale	1088.	8.	5.	$\frac{9}{43}$

6 Assaissimi Matematici, imitando l'esempio dello Snellio, del Regiomontano, e del Bajero, dividono la misura, o essa sia di un piede, o di 10 piedi, che chiamasi *Decempeda*, in parti decimali, e ciascuna di queste parti decimali in altre dieci parti, e ciascuna di queste dieci parti, in altre dieci, e ciò per comodità, e vantaggio del conteggiare. Una tal maniera di divisione si adopera nella Cina non solamente nelle misure, ma anche ne' pesi, come il Padre Francesco *Noël* ci attesta nelle sue osservazioni Matematico-Fisiche fatte nell' Indie, e nella Cina (*a*). Ecco per tanto dichiarato. 1. Che sia misura. 2. Qual sia la divisione, e grandezza della misura. 3. Qual sia la divisione, e grandezza del piè Parigino. 4. Quale la divisione e grandezza dell' antico piede Romano. 5. Quale la divisione, e grandezza del braccio Fiorentino da Panno. 6. Quale la divisione in parti decimali.

(*a*) Cap. 7. pag. 104.

DEFINIZIONI
DELLA
GEOMETRIA PIANA.



Definizione I.

Il Punto è un ſegno indiviſibile di una qualunque grandezza.

SEcondo la prima lezione potrebbe definirſi così -- *Il punto è il Principio, o fine di una lunghezza priva di larghezza, e profondità* -- *o ſecondo Euclide* -- *Il punto è quel che non ha parte alcuna* -- Ma poichè di queſte due Definizioni la prima ſuppon la definizion della linea, la ſeconda la definizion della parte, la quale da Euclide medeſimo non ſi dà, che al quarto Elemento, più compita par che ſia la propoſta da me, per la quale ſi dice primieramente, eſſere il punto alcuna coſa, poichè egli è un ſegno, poi ſi dice, lui non avere alcuna eſtenſione; poichè è indiviſibile, ed è ſegno indiviſibile delle tre grandezze, o eſtenſioni lunghezza, larghezza, e profondità.

Definizione II.

Tav. I. Fig. V. *La linea retta, è una grandezza priva di larghezza, e profondità, ed è la più corta linea, che da un punto a un'altro poſſa condurſi.*

Qualunque linea, o ſia diritta, o ſia curva

va

va è una grandezza priva di larghezza, e profondità, ma la linea retta oltre a ciò, ha questo di proprio, che delle infinite linee A C B, A D B, A E B, A F B, le quali dal punto A al punto B posson condursi, o esse sien diritte, o curve, la cortissima è la linea retta A B.

Definizione III.

La Superficie è una grandezza dotata di lunghezza, e larghezza, ma priva di profondità.

Definizione IV.

La Superficie Piana è la minima superficie, che da una linea a un altra condur si possa.

Definizione V.

L' Angolo rettilineo è l' inclinazione di una linea retta ad un' altra. Tav. I. Fig. VI.

Così la linea B A chinandosi, e incontrandosi coll' altra linea C A nel punto A, forma un angolo nello stesso punto A.

Definizione VI.

Le due linee B A, C A che forman l' angolo chiamansi lati dell' angolo, e il punto A, in cui le due linee s' incontrano dicesi vertice, o cima dell' angolo.

Qui è da avvertirsi primieramente, che se nel punto A due sole linee concorrano, e formino un' angolo solo, allora dovendo nominar quell' angolo, dicesi, l' *angolo A*. Ma se anche nello stesso punto A venga a cadere una terza linea D A, allora al punto A formeransi due angoli, ciascun de' quali si

nomina con tre lettere C A B, B A D, in modo, che la lettera A, che sta al vertice si collochi nel mezzo; e allora la stessa cosa è dire l'angolo C A B, che dire l'angolo, il quale dalle due linee C A, A B, vien compreso. Secondariamente, che la maggiore, o minor lunghezza delle linee, punto non ingrandisce, o impiccolisce l'angolo, il quale non dalla lunghezza, ma dalla inclinazione di due linee di qualunque stesa, è misurato. Onde la stessa cosa è a dire l'angolo C A B, che l'angolo c A b.

Definizione VII.

Tav. I. Fig. VII e Fig. VIII. *Angolo curvilineo, è un angolo, che dall'inclinazione, ed incontro di due linee curve B A, A C, è compreso; Mistilineo, è quello, che dall'inclinazione, ed incontro di una curva* a b, *con una linea retta* a c *è compreso.*

Definizione VIII.

Tav. I. Fig. IX. *Se i vertici di due angoli* A, *a ponganſi l'un sopra dell'altro, e cadendo il lato A B, sopra il lato* a b, *il lato A C venga anch'esso a cadere sopra il lato* a c, *questi due angoli chiamansi uguali, e se non confronta disuguali.*

A questa ugualtà o disugualtà di angoli niente nuoce, o conduce l'uguaglianza, o disuguaglianza de' lati; che l'angolo dalla sola inclinazione si misura.

De-

Definizione IX.

L' Angolo retto, o diritto C A B è quello, il quale uguaglia l' angolo C A D formato dal lato C A, e dalla linea B A prolungata in D. Tav. I. Fig. X.

Allora la linea C A dicesi cadere a perpendicolo sulla B D.

Definizione X.

L' Angolo E A B maggior del retto chiamasi angolo ottuso, e l' angolo E A D minor del retto chiamasi acuto.

Definizione XI.

Figura piana chiamasi una superficie piana chiusa intorno da una, o più linee.

Definizione XII.

Il cerchio è una figura piana chiusa da una sola linea curva B O C D, che chiamasi circonferenza, o Periferia, dalla quale tutte le linee che posson tirarsi al punto di mezzo A che chiamasi centro, sono uguali. Tav. I. Fig. XI.

Definizione XIII.

La linea B C, che passa pel centro A, e che da ambe le parti va a terminare nella circonferenza, chiamasi diametro.

Definizione XIV.

La linea B A, che da qualunque punto della circonferenza si tira al centro chiamasi Raggio, o ver Semidiametro.

La circonferenza si suol dividere in 360. parti uguali. Se il punto A si prenda come vertice, e le due linee D A, A B come lati di un angolo, l' arco del cerchio tra le due

due linee frapposto cioè BD sarà la misura dell'angolo BAD.

Definizione XV.

Tav. I. Fig. XII. *Il triangolo, è una figura piana racchiusa da tre linee rette.*

Definizione XVI.

Triangolo equilatero chiamasi quello, che ha tre lati uguali come il triangolo ABC.

Definizione XVII.

Tav. I. Fig. XIII. *Triangolo Isoscele chiamasi quello che ha due soli lati uguali, come è il triangolo DEF.*

Definizione XVIII.

Tav. I. Fig. XIV. *Triangolo scaleno chiamasi quello, i cui lati sono tutti e tre disuguali come il triangolo GHI.*

Definizione XIX.

Tav. I. Fig. XV. Fig. XVI. Fig. XVII. *Triangolo rettangolo, è quello, che ha un angolo retto. Ottusangolo quello che ha un angolo ottuso. Acutangolo quello, che ha acuti tutti tre gli angoli.*

Definizione XX.

Tav. I. Fig. XVIII. *Se due linee rette s' incontrino con due qualunque altre linee rette per modo, che queste sieno ad una delle due prime perpendicolari, e fra loro uguali, quelle due linee io chiamerò parallele.*

Siano due linee rette, AB, CD, e pongasi, che due qualunque altre linee rette EG, HI incontrin le due prime, e le incontrino per modo, che le due EG, HI siano perpendicolari (*a*) ad una di esse CD, e sieno uguali, allora io chiamerò parallele le

(a) Definiz. 9.

le due prime A B, C D. Sicchè se non s'incontrino, se non sieno perpendicolari, se non sieno uguali, non saranno da me chiamate parallele le due rette A B, C D.

Le due linee E G, H I io chiamerò le distanze di queste due parallele.

Definizione XXI.

Quadrato è quello, che ha i quattro lati, e i quattro angoli uguali. Tav. I. Fig. XIX.

Definizione XXII.

Rombo è quello che ha i quattro lati, non già i quattro angoli uguali. Tav. I. Fig. XX

Definizione XXIII.

Romboide è quella, che avendo i lati opposti, cogli angoli opposti uguali, non è nè equilatera, nè equiangola. Tav. I. Fig. XXI.

Definizione XXIV.

Parallelogrammo è una figura quadrilatera, i cui lati opposti son paralleli.

Definizione XXV.

L' Angolo esterno della figura rettilinea, è quello, che nasce fuori di essa, producendo un suo lato.

Così producendo un lato del quadrato nascerà l' angolo esterno *b a c*, producendo un lato del Rombo nascerà l' angolo esterno *d m e*. Onde tanti saranno gli angoli esterni, quanti sono i lati della figura. Ecco pertanto proposte, e spiegate le definizioni Elementari, le quali bisognerà con qualche noja rendersi famigliari, e aver franche alla memoria.

POSTULATI.

1. Si domanda di potere da qualunque punto tirare una linea diritta a qualunque altro punto.

2. Di poter prolungare una linea diritta terminata.

3. Di poter descrivere un Cerchio da qualunque centro a qualunque intervallo.

Tav. I. Fig. XXII. 4. Di potere da una linea diritta terminata maggiore sottrarre una minore, o di poter descrivere una linea uguale ad una data.

Questo quarto postulato dagli altri comunemente si conta nel numero delle proposizioni, ma essendo per se manifesto esser più facile da una linea maggiore detrarne una minore, che non è descrivere un cerchio da qualunque centro, a qualunque intervallo ho giudicato doverlo aggiugnere a Postulati. Sia la linea maggiore A B, la minore *a b*, si aprano le seste in modo, che una punta sia in *a*, l' altra in *b*, e quest' apertura si trasporti in A b, si farà tolta dalla linea A B, la minore *a b*.

ASSIOMI.

1. Le quantità che sono uguali ad una terza quantità sono uguali ancor fra di loro, e quella quantità, la quale sarà o maggiore, o minore di una di due quantità uguali, sarà per lo stesso modo maggiore, o minore della seconda.

2. A due quantità, che siano fra loro uguali, aggiungi altre due quantità fra loro uguali, le due somme saranno uguali.

3. Da due uguali quantità togline altre due fra loro uguali, gli avanzi saranno uguali ancor essi.

4. Se a due quantità disuguali si vorrà aggiugnere due altre quantità uguali, le somme saranno anch'esse disuguali.

5. Se a due quantità disuguali vorrai togliere altre due quantità uguali, gli avanzi resteranno disuguali.

6. Se due quantità saranno amendue la metà di una terza quantità, saranno fra loro uguali, e se amendue saranno o doppie, o triple, o quadruple di quella terza, saranno ancora fra loro uguali.

7. Le quantità, che poste l'una sopra dell' altra combaciano, e confrontano perfettamente, sono fra loro uguali.

8. Se due linee diritte, o pur due angoli combageranno scambievolmente, saranno uguali, e se saranno uguali combageranno.

9. Il

9. Il tutto è maggiore della ſua parte, ed è uguale a tutte le ſue parti preſe inſieme.

10. Gli angoli retti ſono fra loro uguali.

11. Due linee diritte non chiudono dentro di ſe ſpazio alcuno, poichè per chiudere alcuno ſpazio, vi è biſogno, o di una curva, o di due curve, o di una curva, e una linea diritta, o di tre linee diritte.

Tav. I. Fig. XXIII. 12. Due linee diritte non poſſono aver una comun parte. Sia la linea AC, che s'incontri colla linea BC nel punto C, e faccia angolo, ſi dice, non poterſi trovare una linea CD talmente tirata ſotto il punto C, che ſia parte comune della linea AC, e della linea BC, per tal modo, che tanto la linea ACD, quanto la linea BCD, ſiano una linea diritta. Poichè per eſſer diritta, e non piegata la BC, conviene, che ſi ſtenda verſo E, per eſſer diritta la AC, convien che eſſa vada verſo D.

ELEMENTO
PRIMO.

PROPOSIZIONE I.

Teorema I. di Euclide Propofizione 13.

Se una linea diritta caderà fopra di un' altra, o formerà con effa due angoli retti, o due angoli uguali a due retti.

Spiegazione.

DUe fono i cafi di quefto Teorema. Il primo è, quando la linea AC caderà fopra l' altra BD per modo, che faccia gli angoli ACB, ACD uguali fra di loro. Il fecondo è, quando la linea EC caderà fopra la BD per modo, che faccia gli angoli ECB, ECD difuguali. Tav. II. Fig. I.

Dimoftrazione del primo Cafo.

Effendo ftato fuppofto l' Angolo ACB uguale all' angolo ACD, ciafcun di quefti due angoli farà retto (*a*). Onde amendue infieme faranno due retti. Ciò ec.

(*a*) Per la Definizione 9.

Dimoftrazione del fecondo Cafo.

I tre angoli ECD, ECA, ACB prefi infieme uguagliano i due angoli ACD, ACB (*b*). Ma i due angoli ACD, ACB, i quali nel primo cafo fono ftati fuppofti uguali, formano due angoli retti (*c*). Onde ancora i tre angoli ECD, ECA, ACB, i quali fono lo fteffo, che i due angoli ECD, ECB (*d*), faranno uguali a due angoli retti (*e*). Ciò ec.

(*b*) Per l'Afs. 9.

(*c*) Per il 1. Cafo

(*d*) Per l'Afs. 9.

(*e*) Per l'Afs. 1.

Corollario I.

Se la EC si stenderà verso il punto S, si formeranno nell'opposta parte i due angoli SCB, SCD, i quali (f) pure saranno uguali a due angoli retti. Onde i quattro angoli ECD, ECB, SCB, SCD sono uguali a quattro angoli retti. Sicchè generalmente, se due linee diritte comunque si seghino, al punto del segamento formeranno quattro angoli dall'una, e l'altra parte, i quali saranno uguali a quattro angoli retti.

(f) Pel 2. Caso.

Corollario II.

Fig. II. Tav. II.

Or sieno non già due, ma tre linee diritte BD, ES, NO, le quali si seghino nello stesso punto C, tanto i tre angoli ECD, ECN, NCB presi insieme alla stessa parte, quanto gli altri tre BCS, SCO, OCD presi insieme alla parte opposta saranno uguali a due retti (g). Onde que' sei angoli presi insieme saranno uguali a quattro angoli retti. Lo stesso dicasi, se le linee, che in un punto s'incontrano fussero quattro, cinque, o più. Poichè tutti gli angoli, che esse formano all'una, e all'altra banda presi insieme uguagliano quattro angoli retti.

(g) Proposiz. 1. Caso 2.

PROPOSIZIONE II.

Teorema II. di Euclide 15.

Gli angoli verticalmente opposti sono uguali.

Spiegazione.

Siano due linee diritte B D, S E, che si seghino in un qualunque punto C. Il punto C sarà il vertice, o la cima tanto dell' angolo E C D, quanto dell' angolo B C S (*a*), e questi stessi due angoli E C D, B C S sono in parti opposte, per la qual cosa essi diconsi da' Geometri opposti verticalmente. Or dico, tali due angoli E C D, B C S essere uguali. Tav. II. Fig. III.

(*a*) Defini. 6.

Dimostrazione.

I due angoli E C D, E C B presi insieme uguaglian due angoli retti (*b*), e somigliantemente i due angoli S C B, B C E uguaglian due retti. Poichè la linea B C cade anch' essa sopra la linea S E. Onde, essendo due retti uguali a due retti (*c*) i due angoli D C E, E C B presi insieme uguagliano gli altri due S C B, B C E presi insieme (*d*). Ed essendo di comune l' angolo E C B, se quest' angolo si sottrarrà dall' una, e l' altra parte, gli avanzi E C D, S C B saranno uguali (*e*). Or tali avanzi essendo gli angoli verticalmente opposti E C D, B C S, essi saranno uguali. Ciò che ec.

(*b*) Pel 1. Caso della Prop. 1.

(*c*) Assiom. 10.

(*d*) Assiom. 1.

(*e*) Assiom. 3.

Corollario I.

La ſteſſa dimoſtrazione avrà luogo negli altri due angoli BCE, SCD. Poichè queſti due angoli ſono ancor eſſi oppoſti alla ſteſſa cima C. Onde ſaranno uguali.

Corollario II.

Se ſian due linee rette SC, EC, le quali incontrandoſi nello ſteſſo punto C facciano gli angoli oppoſti ECD, BCS uguali, dico tali linee SC, EC eſſer poſte per diritto, o vero la linea CE eſſere la ſteſſa linea SC prolungata in E. Poichè ſe la CE non ſarà la ſteſſa SC prolungata in E, lo ſarà un' altra CO, cioè la linea SCO, ſarà una linea diritta. Onde i due angoli BCS, OCD ſaranno uguali (*f*). Ma ancora i due angoli ECD, BCS ſono ſtati ſuppoſti uguali. Onde (*g*) i due angoli OCD, ECD ſarebbono uguali. Il che è impoſſibile (*h*). Sicchè ſarà neceſſario, che la linea SC ſtia per diritto alla CE, cioè la CE altro non ſia, che la SC prolongata.

(*f*) Pel *preſente Teor.*

(*g*)(*Aſſiom.* 1.)

(*h*)(*Aſſiom.* 9.)

PROPOSIZIONE III.

Teorema III. di Euclide 4.

Se due lati, e l'angolo intercetto di un qualunque triangolo saranno uguali a' due lati, e all'angolo compreso di un altro triangolo, ancor la base del primo uguaglierà la base del secondo, e gli angoli saranno uguali agli angoli, e tutto il pian del primo triangolo uguale a tutto il pian del secondo.

Spiegazione.

Siano due triangoli A C B, *a c b*, ne' quali il lato C A uguagli il lato *c a*, il lato C B uguagli il lato *c b*, e l'angolo compreso A C B da'due lati A C, C B uguagli l'angolo compreso *a c b* da' due lati *a c*, *c b*, dico primieramente la base A B essere uguale alle base *a b*. 2. l' Angolo C A B essere uguale all' angolo *c a b*, e l'angolo C B A all' angolo *c b a*. 3. tutto il pian triangolare A C B essere uguale al pian triangolare *a c b*. Tav. II. Fig. IV.

Dimostrazione della prima Parte.

Essendo la linea C A uguale alla *c a*, se l' una linea sull' altra si collocasse, il punto *c* caderebbe sul punto C, e il punto *a* sul punto A (*a*). Similmente essendo l'angolo C uguale all' angolo *c*, e la linea C B alla linea *c b*, l' angolo confronterebbe coll' angolo, e la linea *c b* colla linea C B, cioè il punto *b* caderebbe sul punto B (*b*). On-

(*a*) Per l'Ass. 8.

(*b*) Per l'Ass. 8.

de cadendo il punto *a* sul punto A, tutta
(c) Assiom. 11. la *a b* confronterà con tutta la A B (*c*), Onde la base *a b* sarà uguale alla base
(d) Assiom. 7. A B (*d*). Ciò ec.

Dimostrazione della seconda Parte.

Confrontando, e riscontrando tutta la *c a* con tutta la C A, e tutta la *a b* con tutta la A B, l' angolo da esse linee compreso, cioè l' angolo C A B sarà uguale all' angolo
(e) Per la Definiz. 8. *c a b* (*e*). Similmente l' angolo B mostrasi uguale all' angolo *b*.

Dimostrazione della terza Parte.

Confrontando, e combaciando scambievolmente ciascuno a ciascuno i lati C A, A B, B C, co' tre lati *c a*, *a b*, *b c*, tutto lo spazio, o piano C A B caderà su tutto il piano *c a b*. Onde questi due piani sono uguali (*f*).
(f) Assiom. 7.

Corollario.

Ma se il lato C B fosse uguale al lato *c b*, l' angolo B all' angolo *b*, e l' altro lato B S fosse minore dell' altro lato *b a*, anche l' angolo S C B opposto al minor lato sarà minore dell' angolo *c* opposto al lato maggiore. Poichè se la linea B A fosse uguale alla *b a*, l' angolo A C B sarebbe uguale all' angolo *a c b* (*g*). Ma l' angolo S C B è minor dell' angolo A C B, essendo parte di quello (*h*). Onde anche l' angolo S C B sarà minor dell' angolo *a c b* (*i*). Somigliantemente dimostrasi, che essendo il lato C B uguale al lato *c b*, l' angolo B, all' angolo *b*, e il lato

(g) Per la 2. parte della presente Proposizione.
(h) Assiom. 9.
(i) Assiom. 1.

lato BO maggiore del lato *b a*, anche l'angolo opposto OCB sarà maggiore dell' angolo *c*.

PROPOSIZIONE IV.

Teor. IV. di Eucl. prop. 26.

Se un lato, e due angoli adjacenti di un triangolo saranno uguali a un lato, e a due angoli adjacenti di un altro triangolo, ciascun degli altri due lati sarà uguale a ciascun degli altri due, e il terzo angolo dell'uno al terz' angolo dell' altro triangolo, e tutto il piano di un triangolo a tutto il piano dell' altro.

Spiegazione.

Sia il lato AB uguale per ipotesi al lato *a b* l' angolo ad esso adjacente A uguale all' angolo *a*, e l'angolo B pure adjacente all'angolo *b*. Dico 1. il lato AC uguagliare il lato *a c*, e il lato BC il lato *b c*. Dico 2. l'angolo C essere uguale all' angolo *c*. Dico in fine che tutto il triangolo ABC sia pari a tutto il triangolo *a b c*. Tav. II. Fig. V.

Dimostrazione della prima parte.

Se il lato AC non uguaglierà il lato *a c*, sarà o maggiore, o minore dello stesso lato *a c*.

Ma esso non può esser nè maggiore nè minore.

Poichè ſe foſſe maggiore, una ſua parte A O potrà eſſere uguale ad *a c*. Onde i due triangoli O A B, *c a b*, avendo i due lati O A, A B uguali a due lati *c a*, *a b*, e l'angolo A per ipoteſi uguale all'angolo *a*, avranno i due angoli A B O, *a b c* uguali (*a*). Ma ancora l'angolo A B C è ſuppoſto uguale all'angolo *b*. Onde (*b*) i due angoli A B O, A B C ſarebbono uguali. Il che è impoſſibile (*c*). Ma ſe il lato A C foſſe minore del lato *a c* potrebbe ſtenderſi per modo, che A S uguagli la *a c*. Donde con ſimil dimoſtrazione ſi moſtrerebbe l'angolo S B A uguale all'angolo C B A. Il che è impoſſibile (*d*)

Onde il lato A C ſarà uguale al lato *a c*. Ciò ec. Lo ſteſſo moſtraſi de' lati C B, *c b*.

(*a*) Per la 2. parte della Prop. 3.
(*b*) Per l'Aſs. 1.
(*c*) Per l'Aſs. 9.
(*d*) Per l'Aſs. 9.

Dimoſtrazione della ſeconda Parte, e della terza.

Eſſendo i due lati B A, A C, e l'angolo compreſo A, uguali a' due lati *b a*, *a c* e all'angolo compreſo *a*, l'angolo C uguaglierà l'angolo *c*, e tutto il triangolo A C B uguaglierà tutto il triangolo *a c b* (*e*). Ciò ec.

(*e*) Per la Propoſ. 3.

Corollario.

Ma ſe eſſendo uguale un lato, e un angolo adjacente, l'altro angolo adjacente ſia maggiore, o minore, anche il lato ad eſſo oppoſto ſarà maggiore, o minore. Così ſia il lato A B uguale al lato *a b*, l'angolo A uguale all'angolo *a*, e l'angolo A B O minor dell'angolo *b*, anche il lato A O ſarà minore del lato *a c*. Poichè ſe l'angolo A B C foſſe anch'eſſo uguale all'angolo *b*, il lato A C ſarebbe uguale al lato *a c*. Ma il lato A C è maggiore del lato A O. Onde il lato *a c* ſarà pur maggiore del lato A O (*f*). Ma ſe l'angolo A B S foſſe maggio-

(*f*) Aſſiom. 1.

giore dell' angolo *b*, similmente il lato A S si mostra maggiore del lato *a c*.

PROPOSIZIONE V.

Teor. V. di Eucl. 5. e 6.

Se in un triangolo rettilineo due angoli sono uguali, i due lati ad essi opposti sono uguali, e se due lati sono uguali, i due angoli opposti sono uguali.

Spiegazione.

Nel triangolo A C B siano i due angoli A, B uguali, dico i due lati opposti C B, C A essere uguali, cioè il triangolo essere Isoscele. E se il triangolo sarà Isoscele i due angoli A, B opposti a' lati uguali sono uguali. Tav. II. Fig. VI.

Dimostrazione della prima Parte.

Se i due lati C A, C B non saranno uguali, uno di essi per esempio B C, sarà maggiore dell' altro C A. Onde vi sarà una tal sua parte O B, che uguaglierà il lato A C. Conducete la linea O A, e considerate i due triangoli O B A, C A B, ne' quali essendo il lato A B comune, e il lato O B per ipotesi uguale ad A C, e l' angolo compreso B uguale all' angolo compreso C A B, tutto il triangolo O B A uguaglierà tutto il triangolo C A B (*a*). Il che è impossibile (*b*). Onde il lato C B non potrà esser maggiore dell' altro

(*a*) Per la Pros. 3.
(*b*) Per l' Ass. 9.

tro C A. Allo ſteſſo modo dimoſtraſi non poter eſſer minore. Onde ſarà uguale. Ciò ec.

Dimoſtrazione della ſeconda Parte.

Se i due Angoli A, B non foſſero uguali uno di eſſi, per eſempio l' angolo A, ſarà dell' altro maggiore. Onde vi ſarà una tal ſua parte O A B, la quale potrà uguagliare l' angolo B. Sicchè eſſendo uguali per ipoteſi i due angoli O A B, O B A, il lato A O uguaglierà il lato B O (*c*), e aggiugnendoſi di comune la linea C O, la linea C B, cioè la linea C A, uguaglierà le due linee A O, O C. Il che è impoſſibile (*d*). Onde l' angolo A non ſarà maggiore dell' angolo B, ma uguale. Ciò ec.

(c) Per la 1 parte della Prop.

(d) Per la Def. 2.

Corollario.

Se il triangolo C A B aveſſe tutti tre gli angoli C, A, B uguali, cioè ſe foſſe equiangolo, ſarebbe pure equilatero, cioè avrebbe tutti tre i lati uguali. Al che dimoſtrare baſterà applicare la prima, e ſeconda parte della dimoſtrazione a ciaſcuna coppia di angoli, e di lati.

PROPOSIZIONE VI.

Teor. VI. di Eucl. 8.

Se due triangoli avranno ciascun de' tre lati, uguale a ciascun de' tre lati, avranno ancora uguali gli angoli opposti a' lati uguali.

Spiegazione.

Ne' due triangoli ACB, ADB sia il lato AB comune, cioè uno de' lati uguali suppongasi cadere, e combagiar sopra l' altro. In oltre, sia il secondo lato AC uguale al secondo lato AD, e il terzo CB al terzo DB, dico, l' angolo ACB essere uguale all' angolo ADB, l' angolo CBA all' angolo DBA, e l' angolo CAB all' angolo DAB. Dalle due cime C, D conducete la linea CD. Tav. II. Fig. VII.

Dimostrazione.

Considerate primieramente il triangolo CBD, il quale avendo i due lati CB, DB uguali, avrà ancora i due angoli BCD, BDC uguali (*a*). Indi passando all' altro triangolo CAD, troverete per la stessa ragione essere uguali i due angoli ACD, ADC. Onde i due angoli BCE, ACE presi insieme, cioè l' angolo ACB, uguaglierà i due angoli presi insieme BDE, ADE, cioè l' angolo ADB (*b*). Or essendo per ipotesi i due lati CA, CB uguali a due AD, DB, ed essendosi dimostrato l' an-

(*a*) Per la Prop. 5.

(*b*) Per l'Ass. 2. e 9.

l'angolo compreſo A C B uguale all' angolo compreſo A D B, ancora gli altri due angoli (c) C A B, C B A uguaglieranno gli altri due D A B, D B A. Ciò ec.

(c) Per la Propoſ. 3.

Avvertimento.

Se i due propoſti triangoli di lati uguali foſſero per tal modo l'uno dall'altro diſtanti, che niun de' lati coll' altro confrontaſſe, eſſi potrebbono collocarſi per modo, che due qualunque lati uguali confrontaſſero, e confrontando, ſe ne moſtrerebbe l' ugualtà allo ſteſſo modo. Oltredichè i due triangoli uniti, ed accoppiati ſi ſon moſtrati uguali, ma per ſeparazione, che facciaſi, punto non muta la lor quantità; onde anche allora ſono uguali.

Corollario.

Non ſolamente nel caſo in cui il punto E cada nella linea A B, ma eziamdio quando eſſo venga a cader fuori ſi dimoſtra lo ſteſſo Teorema colla ſteſſa dimoſtrazione con queſto ſolo divario, che dove quì ſi è parlato della ſomma de' due angoli B C E, A C E, ivi và adoperata la lor differenza.

PROPOSIZIONE VII.

Problema I. di Eucl. 1.

Data una linea retta, formarvi sopra un triangolo equilatero.

Sia la data linea retta A B, sopra a cui si abbia a formare il triangolo equilatero. Tav. II. Fig. VIII.

Costruzione.

Sopra il punto A come centro coll' apertura delle seste AB descrivete un cerchio CDB (*a*). Similmente sopra il punto B come centro, e la stessa BA come semidiametro descrivete l' altro cerchio CAE. Dal punto C, in cui questi due cerchi si segano a' punti A, B conducete le due linee CA, CB (*b*), dico, esser fatto ciò che si voleva.

(*a*) Per Postulato 3.

(*b*) Per Post. 1.

Dimostrazione.

Poichè la linea CA sarà uguale alla linea A B essendo semidiametri dello stesso cerchio (*c*). Per la stessa ragione la linea CB sarà uguale alla AB. Onde la linea CA uguaglierà la CB (*d*), e ciascuna di esse uguaglierà la AB, cioè il triangolo ACB sarà equilatero (*e*). Ciò ec.

(*c*) Per la Defin. 12.

(*d*) Per l'Ass. 1.

(*e*) Per la Defin. 16.

PROPOSIZIONE VIII.

Problema II.

Formare un triangolo, che abbia gli angoli, e i lati uguali agli angoli e lati di un altro triangolo.

Tav. II. Fig. IX. Sia il dato triangolo ACB, e si abbia a formare un altro triangolo, che abbia i lati, e gli angoli uguali a' lati ed angoli del dato.

Costruzione.

(a) Postul. 4. Si faccia la linea DE uguale alla AB (*a*). Sul punto D come centro, e col semidiametro uguale alla AC descrivasi un'arco circolare MFO. Similmente sul punto E come centro, e col semidiametro BC, si descriva un'altr'arco IFH (*b*). Dal punto F, in cui i due archi si segano, conducansi a' due punti D, E le due linee FD, FE (*c*). Dico esser fatto.

(b) Postul. 3.

(c) Postul. 1.

Dimostrazione.

Poichè la linea DE per costruzione si è fatta uguale alla AB, la linea DF è uguale alla AC per esser semidiametro di un cerchio descritto col semidiametro AC, e per la stessa ragione la FE uguaglia la CB. Onde i lati saranno uguali. Onde gli angoli ancora saranno uguali (*d*), cioè l'angolo D uguale all'angolo A, l'angolo E all'angolo B, e l'angolo F all'angolo C. Ciò ec.

(d) Per la Prop. 6.

Co-

Corollario I. di Eucl. Prop. 22.

Che se si daffer tre linee, le quali non formassero un triangolo, e si avesse di quelle tre linee a formare un triangolo, che abbia i lati uguali ad esse, la costruzion sarebbe la stessa.

Corollario II.

Che se sopra la linea DE al punto D si avesse a formare l'angolo D uguale al dato A, la costruzione non sarà dissomigliante. Poichè tirate comunque la linea CB (e). Descrivete l'arco MO col centro in D, e coll' apertura di seste AC, e l'arco HFI col centro in E, e coll' apertura BC, e dal punto F dell' incontro de' due archi tirate la linea FD, e la linea FE, l'angolo D uguaglierà il dato A. Poichè i due triangoli anno i tre lati uguali. Onde avranno ancora gli angoli uguali. Sicchè l'angolo D uguaglierà il dato A.

(e) Postul. 1.

PROPOSIZIONE IX.

Prob. III. di Eucl. 11.

Data una linea diritta, e in essa un punto, alzare una linea, che sia perpendicolare alla data al punto dato.

Sia la data linea OR, e il dato punto P. Tav. II. Fig. X.

Co-

Coſtruzione.

1. Fate la PA uguale alla PB di qua-
(a) Pel Poſt. 4. lunque grandezza eſſe ſi ſieno (*a*).

2. A' Punti A, B come centri con qualunque apertura di ſeſte, purchè reſti la ſteſſa in amendue i punti, deſcrivete due archi MN, HI.

3. Dal punto del loro incontro C al punto P tirate la linea CP, dico eſſer fatto, cioè la tirata CP eſſer perpendicolare alla OR.

Dimoſtrazione.

Conducete le due linee CA, CB, e conſiderate i due triangoli CPA, CPB, ne' quali il lato AP uguaglia il lato BP per la coſtruzione fatta; il lato PC è comune, e il lato AC uguaglia il lato BC per eſſere amendue ſemidiametri di uguali cerchi. Onde l'angolo CPA è uguale all' angolo
(b) Per la Propoſ. 6. CPB (*b*), cioè a dire la linea PC è perpendicolare, e fa angoli retti colla OR (*c*).
(c) Defin. 9. Ciò ec.

PROPOSIZIONE X.

Prob. IV. di Eucl. 10.

Data una linea, dividerla in due parti uguali.

Tav. II. Fig. XI. Sia la data linea AB, la qual ſi abbia a dividere in due parti uguali.

Co-

Costruzione.

1. Colla stessa apertura di seste, qualunque ella siasi, da punti A, B come centri, si conducan due archi circolari, che s'incontrino in C di sopra, e in D di sotto alla data.

2. Si tiri la linea CD da' due punti dell'incontro. Dico essa linea segare in E in due parti uguali la data AB.

Dimostrazione.

Conducansi le quattro linee CA, CB, DA, DB; e prima considerinsi i due triangoli CBD, CAD, ne' quali il lato CD è di comune, e i due lati CB, BD uguagliano i due lati CA, AD essendo semidiametri di uguali cerchi. Onde anche l'angolo BCD uguaglia l'angolo ACD (*a*), cioè l'angolo BCE uguaglia l'angolo ACE. Ora si passi a considerare gli altri due triangoli BCE, ACE, ne' quali è di comune il lato CE, il lato CB uguaglia il lato CA, e l'angolo intercetto BCE uguaglia l'angolo intercetto ACE, come dianzi si è mostrato. Onde anche la base BE uguaglia la base AE (*b*). Cioè la AB è divisa in E in due parti uguali. Ciò ec.

(a) *Per la Prop.* 6.

(b) *Per la Prop.* 7.

PROPOSIZIONE XI.

Prob. V. di Eucl. 9.

Dividere in due parti uguali un angolo rettilineo dato.

Tav. II. Fig. XII. Si proponga a dividere in due parti uguali l'angolo OCR.

Costruzione.

(a) Pel Post. 3. (b) Pel Post. 1. (c) Per la Propos. 10. (d) Pel Post. 1.

1. Fatto centro in C con una apertura presa a piacere si descriva l'arco AB (*a*).
2. Conducendo la AB (*b*) essa si divida in due parti uguali in P (*c*).
3. Conducasi la PC (*d*). Dico esser fatto.

Dimostrazione.

Ne' due triangoli CPB, CPA i tre lati sono uguali a' tre lati. Poichè il lato CP è di comune, il lato AP uguaglia il lato BP per costruzione, e il lato CA uguaglia il lato CB (*e*). Onde (*f*) l'angolo PCB uguaglia l'angolo PCA, cioè l'angolo dato OCR è diviso ugualmente dalla CP. Ciò ec.

(e) Defin. 12. (f) Per la Propos. 6.

PROPOSIZIONE XII.

Prob. VI. di Eucl. 12.

Data una linea, ed un punto fuori di essa condurre una linea, che dal punto dato sia perpendicolare alla data.

Tav. II. Fig. XIII. Sia la data linea OR, ed il punto fuori di essa sia il punto C.

Co-

Costruzione.

1. Facendo centro il dato punto C con una apertura di seste, che possa (*a*) segar la data OR, si descriva un'arco AB, che la seghi ne' punti A, B. (a) Per Post. 3.

2. Questa linea AB dividasi in due parti uguali in P (*b*), e dal punto P al punto C conducasi la PC (*c*). Dico la CP essere la cercata perpendicolare. (b) Per la Propos. 10. (c) Per Post. 1.

Dimostrazione.

Poichè conducendo le due linee CA, CB, si formeranno i due triangoli CPA, CPB, ne' quali il lato CP è comune, il lato AP uguaglia il lato BP per costruzione, e il lato CA, il lato CB (*d*). Onde l' angolo CPA uguaglierà l' angolo CPB (*e*), cioè la linea CP è perpendicolare alla AB (*f*). Ciò ec. (d) Per la Def. 12 (e) Per la Propos. 6. (f) Per la Def. 9.

PROPOSIZIONE XIII.

Prob. VII. di Eucl. 31.

Data una linea retta, e un punto fuori di essa tirare una linea, che passi pel punto dato, e sia parallela alla data.

Spiegazione.

Sia la data linea CD, e il dato punto G, Tav. II. Fig. XIV

si dee condurre la AB, che passi pel punto G, e sia alla CD parallela.

Costruzione.

1. Dal punto G si cali la GE perpendicolare alla CD (a).

(a) Per la Propos. 12.

2. Preso un qualunque punto F si alzi la FH perpendicolare alla stessa CD (b), e facciasi la FH uguale alla EG.

(b) Per la Propos. 9.

3. Pe' due punti G, H conducasi la AB. Dico esser fatto.

Dimostrazione.

Poichè le due rette EG, FH incontran le due linee AB, CD; sono ad una esse amendue perpendicolari per la costruzione, e sono uguali. Onde le linee AB, CD son parallele (c) Ciò ec.

(c) Per la Definiz. 20.

Corollario.

Qualunque sia il punto G potrà farsi una tal costruzione. Onde si potrà sempre da un dato punto tirare una linea, che sia all'altra Parallela.

PROPOSIZIONE XV.

Teorema VII.

Le linee Parallele anno comune il perpendicolo.

Spiegazione.

Tav. II. Fig. XV.

Sian due linee AB, CD fra di lor parallele, e pongasi una qualunque linea PO esser

ser perpendicolare ad una di esse CD, dico la stessa linea PO esser perpendicolare all'altra AB, cioè le parallele avere comune il perpendicolo.

Costruzione.

1. Si facciano le due linee PE, PF uguali.

2. A' punti E, F si alzino le due linee EG, FH perpendicolari alla linea CD (*a*), le quali incontreranno la AB (*b*).

3. Da' punti G, H ne' quali queste perpendicolari incontrano l'altra linea AB, conducansi allo stesso punto P le linee GP, HP.

Dimostrazione.

Considerate i due triangoli HFP, GEP, ne' quali gli angoli E, F, che per ipotesi son retti, sono uguali; le due linee EP, FP son poste uguali, e finalmente le due linee EG, FH sono uguali (*c*). Onde (*d*) i lati GP, HP sono uguali, e i due angoli GPE, HPE sono uguali. Ma sono uguali ancora i due angoli OPE, OPF (*e*). Onde gli avanzi, cioè gli angoli GPO, HPO sono uguali (*f*). Or considerate gli altri due triangoli GPO, HPO, ne' quali troverete il lato PO comune, i due lati GP, PH uguali, e uguali pure i due angoli compresi GPO, HPO. Onde (*g*) anche l' angolo POG uguaglierà l' angolo POH, cioè la PO è perpendicolare alla AB (*h*). Ciò ec.

(*a*) Per la Prop. 9
(*b*) Per la Def. 20
(*c*) Per la Def. 20
(*d*) Per la Propos. 3.
(*e*) Per la Definiz. 9.
(*f*) Per l'Ass. 3.
(*g*) Per la Prop. 5
(*h*) Per la Def. 9

Corollario I.

Se due linee anno comune il perpendicolo son parallele. Sian due linee A B, C D, alle quali sia di comune perpendicolare la stessa linea P O, dico, le due linee A B, C D esser parallele. Poichè suppongansi, come dianzi, le due linee O G, O H uguali, e le due G E, H F perpendicolari alla A B. I due triangoli G O P, H O P avendo due lati, e l'angolo compreso uguale, saranno uguali, e di angoli, e di lati (*i*), cioè il lato G P uguale a P H, e l'angolo G P O uguale all'angolo H P O, e l'angolo O G P all'angolo O H P. Onde i due angoli G P E, H P E, che sono avanzi di due angoli retti, sottrattine due angoli uguali, sono uguali (*k*). Lo stesso dicasi de' due angoli P G E, P H F. Onde la linea G E, uguaglia la H F (*l*), cioè le linee A B, C D son parallele. (*m*).

(*i*) Per Prop. 3.
(*k*) Per Ass. 3
(*l*) Per la Prop. 4
(*m*) Per la Def. 20

Corollario II.

Due linee G E, H F, che sien perpendicolari alle stesse parallele A B, C D, segan delle porzioni G H, E F uguali. Poichè essendo una stessa C D perpendicolare alle due G E, H F, queste due linee son parallele (*n*). Onde le due porzioni segate G H, E F sono uguali (*o*).

(*n*) Pel Cor. 1. della Prop.
(*o*) Per la Def. 20

Corollario III. di Eucl. 30.

Tav. II. Fig. XVI. Se due linee son parallele ad una medesima linea sono parallele fra di loro. Sian due linee A B, E F parallele alla stessa C D, esse lo

se lo saranno fra di loro. Poichè concepiscasi una linea OI perpendicolare ad AB. Essendo parallele le due linee AB, CD, la OP sarà perpendicolare ancora alla CD (*p*). (p) Per la Prop. Per la stessa ragione la PI sarà perpendicolare ad EF. Onde le due linee AB, EF son perpendicolari alla stessa OI. Onde son parallele (*q*). (q) Pel Cor. 1.

PROPOSIZIONE XV.

Teor. VIII. di Eucl. 29.

Se una linea diritta sega due Parallele, essa primieramente formerà gli angoli interni opposti uguali, in secondo luogo formerà l' angolo interno uguale all' esterno posto alla stessa parte. Finalmente formerà i due angoli interni posti alla stessa parte uguali a due retti.

Spiegazione.

Sù due parallele AB, CD cada in qualunque modo una linea RS. Si dice in primo luogo, che i due angoli AOS, DSO, i quali sono interni alle parallele, e collocati in opposte parti, sono uguali. Poi si dice, che l' angolo ROB, che è esterno rispetto alle parallele, sia uguale all'interno RSD, che è posto verso la stessa parte, che il primo. Indi, che i due angoli BOS, DSO siano uguali a due retti. Tav. II. Fig. XVII.

Dimostrazione della prima Parte.

Tirate le due linee O N, S M perpendicolari ad una delle due parallele (a), le quali lo saranno anche all' altra (b). Indi considerate i due triangoli O N S, S M O, ne' quali il lato S O è comune, il lato S M uguaglia il lato O N (c), e il lato M O uguaglia il lato N S (d). Onde l' angolo O S N uguaglierà l' angolo M O S (e). Ciò ec.

(a) Per la Prop. 9
(b) Prop. 14.
(c) Per la Def. 10
(d) Pel Cor. 2. del la Prop. 14
(e) Per la Prop. 6

Dimostrazione della seconda Parte.

Ma l' angolo M O S uguaglia il suo opposto R O B (f). Onde l' angolo esterno R O B uguaglia l' interno R S D (g). Ciò ec.

(f) Per la Prop. 2
(g) Per l' Ass. 1.

Dimostrazione della terza Parte.

Ma l' angolo R O B, insieme coll' angolo B O S uguaglian due retti (h). Onde anche i due angoli D S O, B O S uguaglian due retti. Ciò ec.

(h) Per la Prop. 1

Corollario I. di Eucl. Prop. 28.

Al contrario, se una linea cadendo sopra due altre faccia gli angoli interni opposti uguali, o l' esterno uguale all' interno posto alla stessa parte, o i due interni posti alla stessa parte uguali a due retti, le due linee son parallele. Basterà dimostrar la prima parte. Siano i due angoli A O S, D S O uguali, dico A B, C D esser parallele. Poichè se nol sono si potrà assegnare una tal linea a b, che sia parallela alla C D (i). Onde l' angolo a O S sarebbe uguale all' angolo D S O (k). Ma l' angolo D S O per ipotesi uguaglia l' angolo A O S. Onde (l) l' angolo

(i) Prop. 13. Cor. 1.
(k) Per la 1. Parte di questa Prop.
(l) Per l' Ass. 1.

lo AOS farebbe uguale all'angolo aOS, il tutto ad una fua parte. Il che è impoffibile (*m*). Onde niuna altra linea fuor della AB è parallela alla CD. (m) Per l'Ass. 9.

Corollario II. di Eucl. Prop. 31.

Indi è manifefto, che per tirare una linea OB parallela alla SD bafterà far l'angolo ROB uguale all'interno RSD. Il che fi farà per la Prop. 8. Cor. 2. E potendofi far fempre una tal coftruzione, fempre per un qualunque punto fuori di una linea può condurfi una parallela alla fteffa linea.

PROPOSIZIONE XVI.

Teor. IX. di Eucl. 32.

In ciafcun triangolo rettilineo l'angolo efterno uguaglia i due interni, ed oppofti, e tutti tre gli angoli del triangolo uguaglian due retti.

Spiegazione.

Sia un qualunque triangolo ACB, e s'intenda ftefo il lato AB in D, l'angolo che nafce CBD chiamafi efterno. Dico adunque l'angolo CBD effere uguale a' due interni oppofti A, C prefi infieme. Dico in oltre i tre angoli A, C, ABC interni uguagliar due angoli retti. Tav. II. Fig. XVIII.

Dimostrazione della prima Parte.

(a) Propofiz.13. (b) Per la 1 parte della Prop 15. (c) Per la 2. parte della Prop.15.

Pongasi la BE (a) parallela al lato AC. Sarà l'angolo EBC uguale all'angolo ACB (b), e l'angolo EBD uguale all'angolo A (c). Onde la somma de' due angoli EBC, EBD, cioè l'angolo esterno CBD uguaglierà i due interni ed opposti C, A. Ciò ec.

Dimostrazione della seconda Parte.

(d) Per la Propof. 1. (e) Per l'Assi.1.

Ma l'esterno CBD, coll'interno CBA uguaglian due retti (d). Onde i tre interni A, C, ABC uguaglian due angoli retti (e). Ciò ec.

Corollario.

Indi derivansi le seguenti illazioni 1. Che se in due triangoli due angoli sono uguali a due angoli il terzo è uguale al terzo. In oltre conosciuti due angoli di un triangolo si sà il terzo. Poichè tutti tre insieme uguaglian due retti, cioè 180 gradi. Così, se un angolo fosse di 70 gradi, e l'altro di 60, il terzo sarebbe di 50 gradi. 2. Che sapotone uno, si sà la somma degli altri due. Così se un angolo fosse di 65 gradi, la somma degli altri due sarebbe di 115 gradi. 3. Che nel triangolo rettangolo ciascun degli altri due angoli sarà acuto. Poichè amendue insieme anno a far 90 gradi. Onde ciascuno sarà minor di 90 gradi. 4. Che nel triangolo rettangolo Isoscele ciascun degli angoli acuti è uguale alla metà di un retto, cioè a 45

gra-

gradi. 5. Che nel triangolo equilatero ciascun angolo è acuto, ed è uguale ad una terza parte di due angoli retti, cioè a 60 gradi. Poichè in tal triangolo i tre angoli sono uguali (*f*) e tutti tre insieme uguaglian due retti. Gli stessi gradi 60 sono due terze parti di 90 gradi, cioè di un retto. 6. Finalmente che in qualunque quadrilatero ACEB i quattro angoli interni presi insieme uguagliano quattro angoli retti. Poichè un tal quadrilatero per una linea CB potrà esser segato in due triangoli CAB, CEB, in ciascun de' quali i tre angoli sono uguali a due retti (*g*). Onde i sei angoli di amendue, cioè in quattro angoli CAB, ABE, BEC, ECA uguagliano quattro angoli retti.

(*f*) Pel Cor. della Prop. 5.

(*g*) Per la Prop.

PROPOSIZIONE XVII.

Teorema X.

In qualunque triangolo al maggior lato opponsi il maggior angolo, e al maggior angolo il maggior lato.

Spiegazione.

Sia un triangolo ACB, in cui qualunque lato AC sia maggior dell'altro CB, dico l' angolo CBA esser maggiore dell'angolo A. E se l'angolo CBA è maggiore dell' ango- Tav. II. Fig. XIX.

lo

lo A, il lato oppoſto CA è maggiore dell'oppoſto CB.

Dimoſtrazione della prima Parte.

Se il lato CA ſia maggiore di CB, una ſua porzione per eſempio CO uguaglierà lo ſteſſo lato CB, s'intendano congiunti i punti O, B per la linea OB. Nel triangolo Iſoſcele OCB i due angoli COB, CBO ſono uguali (*a*). Ma l'angolo eſterno BOC uguaglia i due interni, ed oppoſti OAB, ABO (*b*). Onde è maggiore dell'angolo ſolo A. Onde anche l'angolo CBO è maggiore dell'angolo A, e molto più l'angolo CBA sarà maggiore dell'angolo A. Ciò ec.

(*a*) Per la Propoſ. 5.

(*b*) Per la Propoſ. 16.

Dimoſtrazione della ſeconda Parte.

Se il lato CA non è maggior di CB ſarà o uguale, over minore. Ma non è nè ugual, nè minore. Poichè ſe foſſe uguale, anche l'angolo CBA, ſarebbe uguale all'angolo CAB (*c*). Il che è contra l'Ipoteſi. Ma ſe foſſe minore, anche l'angolo CBA ſarebbe minor dell'angolo CAB (*d*). Il che pure è contra l'ipoteſi. Reſta dunque che CA ſia maggiore. Ciò ec.

(*c*) Per la Propoſ. 5.

(*d*) Per la 1. parte.

PROPOSIZIONE XVIII.

Teorema IX.

Se in due triangoli due lati, e un angolo da essi non compreso, ma opposto al lato uguale, saranno uguali, e l'altr' angolo opposto all'altro lato uguale sia della stessa specie, gli angoli, e i lati corrispondenti di un triangolo, saranno uguali agli angoli, e lati dell'altro.

Spiegazione.

Siano due triangoli ACB, *a c b*, e pongasi il lato A C uguale al lato *a c*, il lato BC al lato *b c*, e l' angolo B opposto al lato A C uguale all'angolo *b* opposto al lato *a c*, e l'angolo A della stessa specie che l' angolo *a*, cioè o acuto, o ottuso, o retto come l'altro. Dico, il terzo lato A B essere uguale al terzo lato *a b*. Donde siegue (*a*), che gli angoli sono uguali agli angoli. Tav. II. Fig. XX

(a) Per la Prop. 6.

Dimostrazione del primo Caso.

Siano prima gli angoli A, *a* acuti. Se il lato A B non sarà uguale al lato *a b* sarà o maggiore, o minore. Sia minore. Dunque una tal porzione per esempio *b d* del maggiore uguaglierà il lato A B. Conducasi la linea *d c*, che sarà uguale al lato A C (*b*), e allora sarà pure uguale al lato *a c* (*c*). Onde il triangolo *a c d* essendo Isoscele, avrà i due angoli *c a d*, *c d a* uguali (*d*). Onde uno

(b) Per la Prop. 3.

(c) Per l'Ass. 1.

(d) Per la Prop. 5.

(e) Per la Prop. 16. (f) Per la Prop. 1. (g) Prop. 3.

uno di essi *c d a* sarà minor di un retto (*e*). Onde l'angolo *c d b* sarà maggior di un retto (*f*) cioè l'angolo *c d b*, sarà ottuso; Onde anche l'angolo A sarebbe ottuso, essendo *c d b* uguale all'angolo A (*g*). Il che è contro l'Ipotesi. Sia maggiore il lato AB del lato *a b*, e allora si mostrerà la stessa impossibilità facendo la costruzione, e la dimostrazione nel triangolo ACB. Onde il lato AB uguaglia il lato *a b*. Ciò ec.

Dimostrazione del secondo, e terzo Caso.

(h) Pel Cor. della Prop. 16. (i) Per la Prop. 4.

Se l'angolo A sia ottuso, e ottuso pur l'angolo *a* colla somigliante dimostrazione, e costruzione si viene a mostrare, che se il lato AB non è uguale al lato *a b*, l'angolo *a* verrebbe ad essere acuto il che è contra l'ipotesi. Onde sarà uguale. Ma se i due angoli A, *a* siano retti, saranno uguali. Onde l'angolo C uguaglierà l'angolo *c* (*h*). Onde AB sarà uguale alla *a b* (*i*). Ciò ec.

Corollario I.

Ma se uno di quegli angoli CAB sarà acuto, e l'altro *c d b* sarà ottuso, cioè se non saranno della medesima specie, allora i due triangoli ACB, *d c b* potranno avere due lati AC, CB uguali a' due lati *d c*, *c b*, e l'angolo B uguale all'angolo *b* senza che tali triangoli abbiano gli altri angoli uguali, e senza che i loro piani siano uguali.

Co-

Corollario II.

In questo stesso caso l' angolo *c d b* sarà uguale al complemento dell' angolo A a due angoli retti. Poichè se col raggio *c d* descriverete un'arco circolare, esso incontrerà nel punto *a* la base *b d* prolongata. Ed essendo i due triangoli ACB, *a c b* acutangoli, ed avendo due lati AC, CB uguali a' due lati *a c*, *c b*, e l' angolo B all' angolo *b*, sarà l' angolo *a* uguale all' angolo A (*k*). Ed essendo Isoscele il triangolo *a c d*, sarà l' angolo *c d a* uguale all' angolo *c a d* (*l*), cioè all' angolo A. Onde l' angolo *c d b* sarà il complemento a due retti dell' angolo A. Nel medesimo caso la differenza de' due angoli *b c d*, BCA sarà uguale all' angolo *a c d*; che è la differenza di due angoli A da due retti.

(*k*) Per la Prop.

(*l*) Per la Prop. 5.

PROPOSIZIONE XIX.

Teor. XII. di Eucl. 1. parte della Prop. 34.

In qualunque Parallelo grammo i lati, e gli angoli opposti sono uguali.

Spiegazione.

Sia un Parallelo grammo ABDC, dico, i due opposti lati AB, CD, o vero gli altri due AC, BD essere uguali. Dico in oltre Tav. II. Fig. XXI.

tre

tre gli angoli B, C, e gli altri due A, D essere uguali.

Dimostrazione.

Conducasi la linea AD, che sarà la diagonale del Parallelogrammo, e segherà il Parallelogrammo in due triangoli ADB, DAC; ne' quali il lato AD è comune, l' angolo BAD uguaglia l' angolo CDA opposto, essendo AB, CD parallele (*a*). Similmente l' angolo BDA uguaglia l' angolo CAD. Onde il lato AB uguaglierà il lato CD, e il lato BD uguaglierà il lato AC (*b*). Onde ancora l' angolo B uguaglierà l' angolo C (*c*), e l' angolo A l' angolo D. Ciò ec.

(*a*) Per la Definiz. 24, e per la Prop. 15.
(*b*) Per la Propos. 4.
(*c*) Per la Propos. 4.

Corollario I. di Eucl. seconda parte della Proposizione 34.

Essendo ancora il piano triangolare ACD uguale al piano DBA (*d*), ogni parallelogrammo sarà diviso in due parti uguali dalla sua Diagonale AD.

(*d*) Per la Propos. 4.

Corollario II.

Essendo AB, CD parallele (*e*) i due angoli ABD, CDB uguaglian due retti (*f*). Onde in ogni parallelogrammo i due angoli interni adjacenti al medesimo lato uguaglian due retti.

(*e*) Per la Defin. 24.
(*f*) Per la 3. parte della Prop. 15.

Corollario III.

Se in un quadrilatero ABDC i due angoli opposti, B, C, e gli altri due ancora A, D sono uguali, esso sarà un parallelogrammo, e se i lati opposti AB, CD, come

me ancora gli altri due A C, B D saranno uguali, esso sarà un parallelogrammo. Si mostra la prima parte. In tal ipotesi i due angoli A B D, C D B presi insieme, saranno uguali a' due angoli B A C, D C A presi insieme (g). Ma i quattro angoli B, D, C, A presi insieme uguaglian quattro retti (h). Onde i due angoli A B D, C A B presi insieme uguaglieranno due retti. Onde le due linee A B, C D son parallele (i). Lo stesso allo stesso modo dimostrasi delle altre due A C, B D. Si dimostra la seconda parte. Essendo due lati uguali a' due lati, e la diagonale A D comune, sarà un triangolo A C D uguale all' altro D B A, e gli angoli agli angoli (k). Onde i lati A B, C D, e gli altri due A C, B D saran paralleli.

(g) Per l'Ass. 2.

(h) Per la Propos. 16. Cor. n. 6.

(i) Pel Cor. 1. della Prop. 15

(k) Per la Propos. 6.

PROPOSIZIONE XX.

Teor. XIII. di Eucl. 43.

Se per un qualunque punto della diagonale del parallelogrammo si conducan due linee parallele a' lati, de' quattro parallelogrammi, che si formeranno, due saranno uguali.

Spiegazione.

Intendansi per uno stesso punto O della diagonale A D condotte le linee E H, I M parallele (a) alle linee o lati C D, B D. E' ma-

Tav. II. Fig. XXII

(a) Per la Prop. 14. Cor. 2.

manifeſto, che il parallelogrammo B C reſterà diviſo in quattro parallelogrammi I E, H M, I H, E M, de' quali gli ultimi due I H, E M, pe' quali non paſſa la diagonale A D, ſono uguali.

Dimoſtrazione.

I due triangoli A B D, D C A ſono uguali (*b*). Somigliantemente ſono uguali i due triangoli A I O, O E A (*c*). Onde tolti queſti ſecondi triangoli da' primi, gli avanzi ſaranno uguali (*d*); cioè il quadrilatero I O D B al quadrilatero E O D C. Ma per la ſteſſa ragione i due triangoli O H D, D M O ſono uguali. Onde tolti queſti ultimi triangoli da' due quadrilateri I O D B, E O D C gli avanzi, cioè i parallelogrammi I H, E M ſaranno uguali (*e*). Ciò ec.

(*b*) Pel Cor. 1. della Propoſ. 12.
(*c*) Pel Cor. 1. della Propoſ. 19.
(*d*) Per l'Aſs. 3.
(*e*) Per l'Aſs. 3.

PROPOSIZIONE XXI.

Teor. XIV. di Eucl. 36. e 37.

I parallelogrammi, e i triangoli, che poſano ſulla ſteſſa baſe, e ſon chiuſi dentro le ſteſſe parallele, ſono uguali.

Spiegazione.

Tav. II. Fig. XXIII. Siano due parallelogrammi B C, C M, che poſino ſulla ſteſſa baſe C D, e ſien chiuſi dentro le ſteſſe parallele A M, C D, dico eſſi eſſe-

essere uguali. In oltre essere uguali i due triangoli CAD, CED.

Dimostrazione della prima Parte.

I due triangoli CAE, DBM sono fra di loro uguali.

Poichè il lato CE uguaglia il lato DM (a), l'angolo CEA uguaglia l'angolo DMB (b), ed essendo l'angolo CAE uguale all'angolo DBM (c), anche il terzo angolo ACE uguaglia il terzo angolo BDM (d). Onde (e) tutto il triangolo CAE uguaglia il triangolo DBM.

Onde il quadrilatero ABOC uguaglierà il quadrilatero EODM.

Poichè essendo comune il triangoletto BOE, tolto esso da amendue i triangoli, gli avanzi, che sono i detti due quadrilateri saranno uguali (f).

Onde aggiunto di comune l'altro triangolo COD, i due piani ABOC, COD, cioè il parallelogrammo ABDC sarà uguale a' due piani EODM, COD, cioè al parallelogrammo EMDC.

(a) Per la Prop. 19.
(b) Per la 2. Parte della Prop. 15.
(c) Per la Prop. 15.
(d) Ivi.
(e) Per la Prop. 4.
(f) Per l'Ass. 3.

Dimostrazione della seconda Parte.

Ma il triangolo CAD è metà del parallelogrammo CB (g), e il triangolo CED è metà del parallelogrammo CM. Onde (h) i due triangoli CAD, CED sono uguali. Ciò ec.

(g) Pel Cor. 1. della Prop. 19.
(h) Per l'Ass. 2.

Corollario I.

Se le due linee EP, AI fosser le distanze delle due parallele, cioè, ad esse perpendicolari, queste due linee sarebbono le altezze de' due triangoli CAD, CED, e sarebbono fra di loro uguali (i). Onde i triangoli, e parallelogrammi, i quali abbiano la stessa base, e la stessa altezza, sono uguali, e se sono uguali, anno la stessa altezza, ove

(i) Pel Cor. 2. della Prop. 14.

E 2 po-

posino sulla stessa base. Poichè se non anno la stessa altezza, l'avranno maggiore, o minore. Se maggiore, maggiori saranno i parallelogrammi, e triangoli, se minore, minori. Il che è contra l'ipotesi. In oltre i triangoli della stessa base, e altezza de' parallelogrammi sono metà di essi.

Corollario II.

Se le due basi di due parallelogrammi, o triangoli chiusi dentro le stesse parallele fossero uguali, benchè non sien le medesime, si mostra l'ugualtà di tali parallelogrammi, e triangoli. Sia FR base del parallelogrammo FG uguale alla CD base del parallelogrammo CM. Essi paralleligrammi saranno uguali. Poichè si conduca FGI parallela alla DM, e similmente RS parallela alla stessa DM. Nel parallelogrammo MF i lati opposti MD, IF sono uguali, e lo stesso dicasi di RS (*m*). Onde essendo uguali anche gli angoli (*n*), i due paralleligrammi ED, HR saranno uguali. Ma il parallelogrammo HR uguaglia il parallelogrammo TR (*o*). Onde (*p*) anche il parallelogrammo ED uguaglia il parallelogrammo TR. Dicasi lo stesso della metà di essi, che sono i triangoli.

(*m*) Per la Propos. 19.
(*n*) Per la Propos. 15.
(*o*) Per la Propos.
(*p*) Assiom. 1.

Corollario III. di Eucl. 39.

E' facile a dimostrare la proposizion conversa, cioè se due triangoli, o parallelogrammi, che posino sulla stessa, o ugual base siano uguali, son chiusi dentro le stesse parallele.

le. Poichè posando sulla stessa base, ed essendo uguali avranno la stessa altezza (*q*), cioè la stessa distanza. Onde le linee, dentro cui giacciono, son parallele. (*r*). (*q*) *Pel Cor. 1.* (*r*) *Per la Defin. 20.*

PROPOSIZIONE XXII.

Teor. XV. di Eucl. 47.

Nel triangolo rettangolo il quadrato del lato opposto all' angolo retto è uguale a' quadrati degli altri due lati presi insieme.

Spiegazione.

Sia un triangolo rettangolo ACD, dico, che il quadrato AD SG del lato AD opposto all' angolo retto ACD uguaglia gli altri due quadrati EC, CM formati sù gli altri due lati AC, CD. S' intendan condotte le linee CG, CS, AM, DE, e la linea CO facciasi parallela ad AG (*a*). Tav. II. Fig. XXIV. (*a*) *Per la Propos. 11.*

Dimostrazione.

Il triangolo EAD è metà del quadrato EC, e il triangolo CAG è metà del parallelogrammo GN.

Poichè il triangolo EDA posa sulla stessa base EA del quadrato EC, e stà dentro le stesse parallele EA, RD. Onde avran la stessa altezza. Onde il triangolo sarà metà del quadrato. Similmente il triangolo CAG posa sulla base AG, sù cui posa il parallelogrammo GN, ed è chiuso dentro le stesse parallele AG, CO. Onde sarà metà del parallelogrammo GN. (*b*). (*b*) *Pel Cor. 1. della Prop. 21.*

Ma i due triangoli E A D, C A G sono uguali.

Poichè il lato E A uguaglia il lato A C (c) il lato A D uguaglia il lato A G (d), e l'angolo compreso E A D uguaglia l'angolo compreso C A G Poichè l'angolo C A D è comune, e i due angoli E A C, G A D son retti. Onde il triangolo, o piano triangolare E A D uguaglierà il triangolo C A G (e).

Onde il quadrato E C uguaglia il parallelogrammo G N (f). Ma allo stesso modo dimostrasi il quadrato C M essere uguale al parallelogrammo N S.

Poichè allo stesso modo i due triangoli M D A, C D S si mostrano metà de' quadrilateri C M, N S, ed uguali fra di loro.

Onde i due quadrati E C, C M presi insieme sono uguali a' due rettangoli A O, N S presi insieme, cioè al quadrato A S (g). Ciò ec.

Corollario.

Che se il quadrato della A D uguaglia i due quadrati della D C, e della A C, l'angolo A C D è retto. Poichè si alzi la C O perpendicolare alla A C (h), e facciasi C O uguale a D C, e conducasi la A O. E' manifesto, che i due triangoli A C D, A C O anno i tre lati uguali a' tre lati, per essere A C comune, C D fatta uguale a C O, e la A O uguale alla A D. Poichè essendo tanto il quadrato della A D quanto il quadrato della A O uguale a' due quadrati della A C, e della D C, sarà (i) il quadrato della A D, uguale al quadrato della A O, cioè la A D uguale alla A O. Onde (k) l'angolo A C D uguaglia l'angolo A C O. Onde l'angolo A C D è retto.

(c) Per la Definiz. 21.
(d) Ivi.
(e) Per la Propos. 3.
(f) Per l'Assi. 1.
(g) Assiom. 9.
Tav. II. Fig. XXV.
(h) Propos. 9.
(i) Assiom. 1.
(k) Per la Propos. 6.

PRO-

PROPOSIZIONE XXIII.

Prob. VII. di Euclide 46.

Data una linea AB formare sopra di essa un quadrato. Tav. II. Fig. XXVI.

Costruzione.

1. A' due estremi punti A, B si levin due linee AC, BD alla stessa AB perpendicolari (*a*). (*a*) Per la Pro- pos. 7.

2. Ciascuna di queste due linee facciasi uguale alla linea AB, e tirisi la CD. Dico esser fatto.

Dimostrazione.

Essendo uguali le due linee AC, BD, ed essendo le distanze delle due linee AB, CD, queste due linee AB, CD saran parallele (*b*). Onde i due angoli C, D saranno retti (*c*). Sicchè i quattro angoli essendo retti sono uguali. Ma uguali pur sono i quattro lati. Poichè i due lati AC, BD sono per costruzione uguali alla AB, e le due linee DA, DB essendo perpendicolari alla AB son parallele. Onde segano le due linee CD, AB uguali (*d*). Onde essendo uguali i quattro angoli, e le quattro linee, la figura CDBA sarà un quadrato (*e*). Ciò ec.

(*b*) Per la Def. 20
(*c*) Per la Pro- pos. 14.
(*d*) Cor. 2. della Prop. 14.
(*e*) Per la Def. 21

PROPOSIZIONE XXIV.

Problema IX. di Eucl. 45.

Dato un triangolo formare un parallelogrammo, il qual sia uguale al dato triangolo, e abbia l'angolo dato.

Spiegazione.

Tav. II. Fig. XXVII. Sia il dato triangolo A C B, e l'angolo dato X, si propone a trovare un parallelogrammo, il quale sia uguale al triangolo A C B, e abbia l'angolo X.

Costruzione.

1. La Base A B del dato triangolo si divida per metà in D (*a*).

2. Si faccia l'angolo D A O, uguale al dato X. (*b*).

3. Dalla cima del triangolo C conducasi la C S parallela ad A B, e dal punto D, la D E parallela ad A O (*c*). Dico il parallelogrammo O D essere il cercato.

(*a*) Per la Propos. 10.
(*b*) Per la Propos. 8. Cor. 2.
(*c*) Per la Propos. 13.

Dimostrazione.

Poichè essendo l'angolo O A D uguale al dato X per costruzione, esso sarà sotto il dato angolo. In oltre essendo il parallelogrammo O D metà del parallelogrammo, che fosse descritto sulla A B, e avesse la stessa altezza, ed essendo il triangolo A C B metà di questo stesso parallelogrammo (*d*), il triangolo A C B uguaglierà il parallelogrammo O D (*e*) Ciò ec.

(*d*) Per la Propos. 21. Cor. 1.
(*e*) Per l'Ass. 1.

Co-

Corollario.

Ma se si volesse un parallelogrammo uguale a un altro dato, sotto l' angolo dato, basterà sopra la stessa base del dato formar l' angolo dato, e far la stessa costruzione.

PROPOSIZIONE XXV.

Prob. X. di Eucl. 44.

Dato un triangolo, un' angolo, e una linea, formare un parallelogrammo, il quale sia uguale al dato triangolo, abbia l' angolo dato, e abbia un lato uguale alla linea data.

Spiegazione.

Sia il dato triangolo M, l' angolo dato X, la data linea AB. Si dee formare un parallelogrammo, che oltre all' essere uguale al dato triangolo, e avere l' angolo dato, abbia un de' suoi lati uguale alla linea data AB. Tav. II. Fig. XXVIII

Costruzione.

1. Si faccia il parallelogrammo SHER, il quale uguagli il dato triangolo, e abbia l' angolo dato X (*a*).

2. Stendete il lato RE in O, finchè la EO uguagli la data linea AB, e il lato SH indefinitamente.

(a) Per la Prop. 24.

3. Dal punto O conducete la OV parallela

(b) Per la Prop. 13. la ad EH (b), e dal punto V tirate la linea VE indefinitamente.

4. Stendete la SR fino all'incontro colla diagonale nel punto C, e dal punto C conducete la CD parallela ad RO (c), dico esser fatto, ed il parallelogrammo ED esser il cercato.

(c) Ivi.

Dimostrazione.

Poichè primieramente tal parallelogrammo hà il lato EO uguale per costruzione alla data linea AB. Secondariamente hà l'angolo END pari al dato X. Poichè l'angolo SRE è uguale al dato per costruzione, e l'angolo HEO è uguale all'angolo SRE, e l'angolo END è uguale all'angolo HEO (d). Onde (e) l'angolo END è uguale al dato X. In terzo luogo il parallelogrammo ED uguaglia il parallelogrammo SE (f), e il parallelogrammo SE per costruzione uguaglia il dato triangolo M. Onde (g) il parallelogrammo ED uguaglia il dato triangolo M. Che è la terza condizione del Problema. Onde ec. Ciò ec.

(d) Per la Prop. 15.
(e) Per l'Ass. 1.
(f) Per la Prop. 20.
(g) Per l'Ass. 1.

Corollario I.

Se fosse dato un parallelogrammo, un angolo, e una linea si può somigliantemente, e colla stessa costruzione trovare un altro parallelogrammo uguale al dato, sotto l'angolo dato, e sotto il dato lato.

Co-

Corollario II.

Se fosse dato non già un triangolo, ma una figura rettilinea qualunque, per esempio A B C D E, e si chiedesse un parallelogrammo, il quale uguagliasse la data figura, ed avesse un' angolo, ed una linea, o lato assegnato, non si avrebbe a far altro, che risolvere la data figura in triangoli E A D, D A C, C A B, e replicar sopra ciascuno la stessa costruzione della Proposizione, la qual tante volte replicata, quanti sono i triangoli, somministrerà un parallelogrammo, che hà le richieste condizioni. Tav. II. Fig. XXIX.

Fine del Primo Elemento.

USI DELLE PROPOSIZIONI
DEL
PRIMO ELEMENTO.

Uso della Proposizione I.

Tav. IV. Fig. I.

Questa proposizione, e i suoi Corollari anno il loro uso presso a' Meccanici. Sian tre potenze, o tre forze A, B, D, le quali secondo le tre direzioni CA, CB, CD traggano il punto C per modo, che niuna di esse prevalga. Il che dicesi essere in equilibrio, o fare equilibrio. Il punto C di mezzo, e le potenze stesse per tale equilibrio staranno in quiete. Or sia dato un angolo di direzione ACB, è chiaro, che si saprà la somma degli altri due angoli. Poichè tutti e tre insieme fanno quattro angoli retti, cioè 360 gradi (*a*). Sicchè sottraendo l'angolo dato da 360 gradi, l'avanzo sarà la somma degli altri due. Se l'angolo dato per esempio fosse di 112 gradi, noi sapremo, che gli altri due insieme saranno di 248 gradi.

(*a*) Pel Cor. 2. della Propos.

Che se non solamente il primo angolo ACB, ma anche il secondo BCD fosse dato, si saprebbe determinatamente il terzo ACD. Se per esempio il secondo BCD fosse di 98 gradi, rimarrebbe il terzo ACD di 150 gradi.

Della

Della conoſcenza di tali angoli ſi vagliono i Meccanici per determinare l'energia di due tali potenze, conoſciuta, o data, che ſia la terza. O vero ſe niuna potenza ſia determinatamente conoſciuta, eſſi almeno dagli angoli definiſcono, e taſſano il rapporto di dette tre potenze, e queſto è uno degli eleganti problemi della Meccanica.

Uſo della Prop. II.

Queſta Propoſizione ſomminiſtra agli Aſtronomi la maniera di oſſervare col quadrante la diſtanza del corpo celeſte dal vertice; e dall'Orizzonte.

Poichè ſia QCO un quarto di cerchio, il cui arco QO ſia ben diviſo in 90 gradi, e dal centro C penda liberamente il piombino P ſoſpeſo a un filo ſottiliſſimo di ſeta. L'oſſervatore addirizzi il cannocchialetto OC del quadrante in modo, che vegga il corpo celeſte S in mezzo al campo del piccol teleſcopio. Il piombino CP dividerà l'arco del quadrante QO in due archi IO, IQ. Dico l'arco IO indicare la diſtanza del corpo celeſte dal Vertice, e l'arco IQ la diſtanza dall'Orizzonte. Poichè il raggio lucido SCO ſi concepiſce propagato per una linea diritta SCO, e la linea verticale ZC diſteſa confronta col piombino CP. Onde eſſendo diritte le due linee ZP, SO, l'angolo ZCS per la preſente propoſizione uguaglia l'oppoſto

Tav.IV. Fig.II.

ſto alla cima O C I . Onde eſſendo l' angolo Z C S la diſtanza del corpo celeſte dal vertice, l'angolo O C I indicherà tal diſtanza.

In oltre i due angoli Z C H, O C Q per eſſere amendue retti ſono uguali. Ma uguali ſi ſono pur dimoſtrati i due angoli Z C S, O C I; onde eſſendo queſti tolti da' primi, i due avanzi S C H, I C Q ſono uguali (a). Cioè l'angolo I C Q, o l'arco I Q indica la diſtanza del corpo celeſte dall'Orizzonte.

(a) Per l'Aſs. 3.

Uſo della Prop. III.

Tav. IV. Fig. III. Si ſoſpenda a un muro una medaglia, o altro corpo D all'altezza dell'oſſervatore A D, e ſul pavimento in qualunque punto per eſempio in C ſi ponga in piano un piccolo ſpecchio. Si cerca un punto nella ſtanza, in cui l' oſſervatore mettendo i piedi, e ſtando diritto con la perſona poſſa vedere nello ſpecchio la medaglia, o il corpo ſoſpeſo al muro. Queſto Problema Catoptrico ſcioglieſi coll' ajuto della detta Propoſizione. Poichè ſia A D l' altezza perpendicolare del corpo ſoſpeſo dal pavimento. Dal punto A per il punto C dello ſpecchio ſi tiri la linea A C, la quale ſi ſtenda indefinitamente verſo B (a). Si faccia la linea C B uguale ad A C (b), dico, che il punto B è il primo cercato. Poichè ſia B O l' altezza dell' oſſervatore, e ſi concepiſcano i due triangoli D C A, O C B, nei quali il lato D A uguaglia il lato B O per

(a) Poſtul. 2.
(b) Poſtul. 4.

per essere ambedue uguali all'altezza del medesimo osservatore. Il lato A C si è fatto uguale al lato B C, e gli angoli A, B sono uguali; Poichè tanto il muro, quanto l'osservatore posano ad angoli retti sul pavimento; e gli angoli retti sono frà loro uguali (c). Dunque (d) tutto il triangolo D A C uguaglia il triangolo O C B, e gli angoli D C A, O C B sono uguali, per esser opposti a due lati D A, B O fra loro uguali. Or secondo le leggi della catoptrica (cioè della scienza, che tratta della riflessione della luce) quando un raggio del corpo D perviene al punto C di uno specchio piano, e si ripercuote verso C O per modo, che forma l'angolo D C A, che chiamasi d'incidenza, uguale all'angolo O C B di riflessione, sotto quell' angolo vedesi in C l'oggetto D. Avendo noi mostrata l'ugualtà di questi angoli, abbiamo sciolto il problema.

(c) Assiom 10.
(d) Per la Propos. 3.

Uso della Prop. IV.

Trovare una facile, e costante misura per conoscere dall' altezza di una torre quando una nave sia dentro il tiro del cannone.

L'Architettura militare insegna, che il tiro di cannone, che in quell'arte chiamano *Orizzontale* non oltrepassa i 500 passi; e che il massimo tiro, che chiamasi tiro a volo, e si fà con alzare il cannone 45 gradi, giugne a 6000 passi. Ciò posto, sia una torre B A O C,

Tav. IV. Fig. IV.

BAOC, la quale quanto più sarà alta, tanto sarà più acconcia. Se si vorrà osservare quando una nave N guardata dalla sommità A sia sotto il tiro, si faccia questa previa osservazione. Si misuri in un piano terrestre, che non sia molto elevato, o inclinato sopra il piano Orizzontale una qualunque linea CD, la quale sia di 500 passi, se si cerca il tiro Orizzontale, di 6000, se si cerca il tiro a volo. Si segni il punto D, e dalla sommità della torre B si osservi replicatamente, e con esattezza l' angolo CBD col quadrante. Quest' angolo sarà una stabil misura per sapere quando la nave N, che và accostandosi, sia sotto il tiro di Cannone. Poichè quando l' osservatore in A collo stesso quadrante trova l' angolo NAO uguale all' angolo B, sarà sicuro esser la nave tanto distante da O, quanto il punto D è distante da C. Imperocchè, se voi esaminerete i due triangoli DCB, NOA, troverete in essi il lato BC essere uguale al lato AO, per essere la torre ugualmente alta dall' Orizzonte, e nel punto B, e in qualunque altro suo punto A; in oltre troverete l' angolo DCB uguale all' angolo NOA, perchè le pareti esteriori di una torre regolare sono ugualmente inchinate al piano Orizzontale, e finalmente l' angolo DBC osservato uguale all' angolo A. Onde (a) CD uguaglierà ON, ma CD è stata misurata, e da noi posta di un tiro di cannone, dunque lo stesso sarà di ON.

(a) Per la Prop.

Quest'

Queſt'uſo potrebbe per la ſteſſa maniera applicarſi al tiro di bomba.

Uſo della Prop. V.

Se la diſtanza di due luoghi A, B ſia inacceſſibile, miſurarla coll' ajuto di queſta propoſizione. Dal luogo A ſi oſſervi l'angolo, che fà la linea viſuale, BA con un altrà AO, che abbia per iſcopo, e dirittura l'albero O. Poi per la dirittura AO ſi proceda da A verſo O infino a tanto, che ſi ritrovi un qualunque punto C, dove la linea BC faccia colla linea AC l'angolo ſteſſo, che BA faceva in OA, cioè l'angolo A prima oſſervato. Dico, che miſurando la linea CB, la qual ſi ſuppone acceſſibile, ſi troverà nel tempo ſteſſo la diſtanza BA, la quale dee eſſere uguale a BC. Poichè l'angolo A è uguale all'angolo C. Tav. IV. Fig. V.

Uſo della Prop. VII.

Queſta propoſizione ha un uſo aſſai comune nella civile architettura. Poichè ſia da delinearſi una ovale architettonica di qualunque grandezza. Pigliate a voſtro piacere una qualunque linea CD, ſopra cui deſcrivete coll'ajuto di queſta propoſizione due triangoli equilateri, l'uno CKD, l'altro CID, de' quali triangoli i lati KC, KD, IC, ID ſi prolunghino indefinitamente così, che KC Tav. IV. Fig. VI.

si stenda verso F, KD verso H, IC verso E, e finalmente I D verso G. Or piantate una punta del compasso in C, e descrivete coll' apertura C E presa a capriccio l' arco E A F. Quèsta stessa apertura trasportatela nel punto D, e descrivete l'arco GBH. Indi portando una punta delle seste nel punto I apritele fino ad E, e descrivete l' arco EG. Questa stessa apertura servirà per compire l' arco F H, collocando la punta delle stesse in K. Con questa stessa regola aprendo più, o meno le seste nel descrivere il primo arco, voi potrete farvi nascere avanti gli occhi quante ovali volete maggiori, e minori della descritta fin' ora. Ecco dunque coll'ajuto dell'Equilatero, e di due sole aperture di seste descritta l' ovale.

Uso della Prop. IX.

Tav.IV. Fig. VIII. Debba misurarsi il letto di un fiume BC. Si stenda la BC indefinitamente verso D. Al punto C s'inalzi la perpendicolare CA, la qual si faccia di qualunque misura a vostro genio. Al punto A si osservi l'angolo CAB, che la perpendicolare forma col lato BA, al quale si faccia uguale l'angolo CAD, dico, la CD, che può misurarsi essere uguale alla cercata CB. Poichè ne' due triangoli BAC, DAC la linea CA è lato comune, l'angolo BCA uguaglia l'angolo DCA, e l' angolo BAC uguaglia l' angolo DAC; onde (*a*) il lato BC uguaglia il lato CD.

(*a*) Per la Prop. 4

Uso

Uso della Prop. X.

Sia A B una profonda voragine, la cui inaccessibil distanza A B voglia in alcun modo misurarsi; il che ottenete voi coll'ajuto della presente, e delle passate proposizioni. Portandovi nel punto B col vostro quadrante misurate l'angolo A B E, che fa la linea visuale A B colla linea visuale E B terminata da un oggetto ben visibile in E. Indi dividete per la proposizione la distanza B E in due parti uguali in C, e contrassegnate il punto C con un segnale ben visibile. Al punto E fate l'angolo C E F uguale all'osservato A B C (a). Per la linea indefinita E F incaminatevi infino a tanto, che giugniate al punto F, che stia per diritto co' due punti C, A. Dico, che la linea E F accessibile, e che per ciò può soggettarsi all'attual misura, e uguale alla inaccessibile, e cercata A B.

Tav. IV. Fig. VII.

(a) Cor. 2. della Prop. 8.

Poichè, considerando i due triangoli B A C, E F C, troverete la base B C uguale per la costruzione alla base E C, l'angolo A B C uguale per costruzione all' angolo F E C, e finalmente l'angolo A C B uguale all'angolo F C E (b). Onde sarà (c) il lato inaccessibile A B uguale al lato accessibile F E.

(b) Per la Prop. 2.

(c) Per la Prop. 4.

Uso della Prop. XI.

Tav.IV. Fig.XI. Questa proposizione ci somministra una maniera semplicissima di tirare la linea meridiana in qualunque piano orizzontale. La meridiana non è altro, se non che una linea, in cui dee gettar l' ombra in tutto l'anno uno stile, quando siamo al mezzo giorno. Nel dato piano piglisi un punto P, sù cui, come centro si descriva un cerchio CMD, o anche più cerchj. Indi allo stesso punto P si alzi uno stile AP, il quale si esamini colla squadra, e si faccia perpendicolare al piano. Prima del mezzo giorno si osservi, quando l' ombra dello stile colla sua estremità seghi il descritto cerchio in C, e si segni il punto C. Si faccia lo stesso dopo il mezzo giorno, e segnisi il punto D. Ciò si faccia due, o trè ore prima, e doppo del mezzo dì per maggior sicurezza. I due punti C, D faranno col punto P un angolo CPD, il quale si partirà per metà. La linea PM, che lo partisce, sarà la cercata meridiana. Che se l'osservazione si facesse in più cerchj e in diverse ore prima, e doppo il mezzo dì, potendo l' una osservazione confrontarsi coll'altra, quando tutte le linee di divisione combaceranno colla PM, la meridiana sarà sicura.

Uso

Uso della Prop. XII.

Siano in un bigliardo SO due palle A, B collocate in qualunque punto, si cerca un punto E, da cui riflettendosi la palla A vada ad incontrare la palla B. Costruzione. Dal punto B tirisi perpendicolarmente alla sponda (a) ON la linea BC, si stenda indefinitamente. Indi si faccia CD uguale a BC. Dal punto D si tiri la DA, che incontrerà la sponda in E, dico, il punto E essere il punto cercato. Si conduca la linea BE, e si considerino i due triangoli BCE, DCE, ne' quali il lato BC uguaglia per costruzione il lato CD. Il lato CE è comune, e l'angolo intercetto BCE, essendo retto, uguaglia l'angolo DCE retto. Onde (b) l'angolo BEC uguaglia l'angolo DEC. Ma l'angolo DEC uguaglia il suo opposto alla cima AEO; onde l'angolo AEO uguaglia l'angolo BEC (c), cioè l'angolo d'incidenza, l'angolo istesso, ciò, che è necessario, perchè la palla A ripercossa in E corra per la via EB, e vada a trovare la palla B.

Tav. VI. Fig. X.

(a) Per la Prop. 11.

(b) Prop. 3.

(c) Assiom. 1.

Uso della Prop. XIV.

Tav.IV. Fig.XI. Siano A B, C S le ſponde di un qualche ó fiume, o canale, le quali ſupponganſi parallele, ſiaſi preſa, come ſi è fatto di ſopra, la diſtanza perpendicolare C A, e voglia ſaperſi la diſtanza del punto A da un qualche punto B. Prolongate A C ſino a D, facendo C D uguale a C A; al punto D alzate indefinitamente una perpendicolare D a. Indi dal punto D incaminatevi verſo a infino a tanto, che arriviate al punto O, in cui i due ſegni C, B ſono nella ſteſſa dirittura. La linea O D è uguale alla cercata A B. Poichè ne' due triangoli C A B, C D O il lato A C uguaglia il lato C D, l' angolo A C B il ſuo verticale oppoſto D C O, e finalmente l' angolo A è retto come l' angolo D. Poichè eſſendo C A perpendicolare a C S lo ſarà anche ad A B (*a*).

(*a*) Prop. 14.

Uso della Prop. XV.

Coll' ajuto di queſta propoſizione, e delle ombre, che le Guglie gettavan ſul pavimento nel mezzo giorno del dì equinoziale, miſuravano gli antichi le latitudini delle Città. Tav.IV. Fig.XII. Latitudine di una Città, o di un luogo terreſtre A, niente altro è, che la diſtanza del detto luogo dall' Equatore terreſtre, il quale ſuol chiamarſi aſſolutamente *la linea*, miſurata in archi di cerchio. Così ſe il punto S

ſia

fia un punto dell' Equatore, farebbe l'arco A S la latitudine del luogo A. A mifurar queft' arco A S coll'ajuto delle ombre meridiane de' dì equinoziali bifogna premetter due cofe. La prima, che il raggio folare nel mezzo dì del giorno equinoziale cade a piombo a que' punti terreftri, che ftan nella linea. Così fe il punto S fia nella linea, il raggio meridiano M S cade in tal modo, che prolungandofi indefinitamente pafferebbe nel centro terreftre C. La feconda, che i due raggi folari M S, N V fi confideran come paralleli, e fenfibilmente lo fono per l' enorme diftanza del fole dalla terra. Le quali cofe pofte, fia il punto terreftre A la Città di Roma, in cui fia alzato perpendicolarmente all'Orizzonte uno ftile O A, ovvero una Guglia. Si offervi la lunghezza dell'ombra equinoziale meridiana A V. Dico, dalla lunghezza meridiana di queft' ombra ricavarfi la latitudine del luogo A, cioè l'arco A S. Poichè fi tiri indefinitamente la perpendicolare O A. Quefta pafferà pel centro C, pel quale paffa il raggio M S prolungato anch' effo. Si confideri il triangolo O A V, il quale avrà l'angolo O A V retto, per effer O A perpendicolare al piano A V. Avrà ancora il lato O A, di cui fi ha la mifura, per effer l' altezza dello ftile, o Guglia, fi avrà ancora il lato V A, che è la lunghezza dell'ombra meridiana. Onde farà determinato l' angolo A O V, il quale o col calcolo trigonometrico,

o colla descrizione di un triangolo uguale al triangolo V O A potrà ricavarsi. Ma l'angolo V O A è uguale all' angolo A C S per esser le due linee O V, M C parallele; dunque si avrà l' angolo A C S; Ma l'angolo A C S è la misura dell'arco S A, che è la latitudine. Onde dalla misura dell' angolo A O V si avrà la latitudine del punto A. Con questa regola si cava la Romana latitudine per un luogo di Vitruvio (*a*), in cui egli dice, che in Roma uno stile di nove parti gettava nel dì equinoziale al mezzogiorno un ombra di 8 parti. Sicchè formato un triangolo rettangolo, in cui un lato sia di 8 palmi, l' altro di 9, l'angolo opposto al lato di 8 palmi somministra la Romana latitudine con tal esattezza, come osserva il Poleni al detto luogo di Vitruvio, che a riserva di una minuzia di pochi secondi si ricava mirabilmente quella stessa latitudine osservata da Monsignor Bianchini in Roma. Coll' ajuto di questa stessa proposizione, e parallelismo de' raggi Eratostene misurò la grandezza della terra.

(*a*) *Lib. 9. cap. 8.*

Uso della Prop. XVIII.

E' maraviglioso l'uso di questa proposizione nella Meccanica. Poichè con essa si dimostra, che se una palla perfettamente elastica urta in un piano immobile EO, si ripercuote in modo, che fà l'angolo d'incidenza uguale all'angolo di riflessione, al che premetto due cose. La prima, che un corpo elastico urtando in un piano immobile non perde nella percossa alcuna velocità rispiegando, e restituendo le sue parti compresse colla stessa forza, onde furon compresse. La seconda, che un moto semplice obliquo AB si compone di due moti, del moto verticale AE, e dell'orizzontale AC. Sicchè descrivendo il parallelogrammo AEBC e imprimendo alla palla in A un tal moto verso E, per cui se non trovasse ostacolo nel tempo dato arriverebbe in E, e un altro verso C, per cui nel tempo dato arriverebbe in C, questi due moti impressi nel tempo stesso alla palla in A la faranno correre per la diagonale AB. Onde il moto semplice AB si può dividere in due moti, il primo AE, o pure CB verticale, il secondo EB, o pure AC orizzontale. Da questi principj si deduce che nella percossa, che la palla dà nel punto B, impiega la sola forza verticale rimanendo intatta l'orizzontale. Poichè la forza orizzontale non ispinge la palla a contrastare col piano orizzontale, ma a semplicemente Tav. IV. Fig. XIII.

mente

mente ſtriſciare, e toccarlo in un punto. Or poniamo, che il corpo parta dal punto A con velocità da correre in un dato tempo tutta la A S doppia di A B. Trovando in B l' oſtacolo volgerà verſo D facendo nel dato tempo B D uguale a B A. Poichè per la prima regola il corpo non perde forza, ma muta ſolo direzione per la percoſſa, e dall' altra parte ſecondo l' ipoteſi il corpo è partito da A con velocità da correre due A B nel tempo dato. In oltre doppo la percoſſa è rimaſta tutta intiera al corpo la forza orizzontale B E. Dunque dal punto D ſi tiri la perpendicolare D O, e ſi conſiderino i due triangoli D O B, A E B, ne' quali il lato B D è uguale al lato A B, il lato O B, che eſprime il moto orizzontale uguale ad E B, e finalmente l' angolo O retto, all'angolo E pur retto. Onde tutto il triangolo è uguale a tutto il triangolo. Così l'angolo di ripercuotimento D B O è uguale all'angolo d'incidenza A B E.

Tav. IV. Fig. XIV. Con queſti ſteſſi principj ſi ſpiega ſemplicemente per qual cagione un corpo benchè o di uguale, o di maggior gravità coll'acqua, pure ſe colla direzione A B nell'acqua ſi ſcaglia, pervenuto alla ſuperficie B torca il ſuo cammino, e in vece di andare verſo il punto S vada verſo il punto L. Poichè l' acqua medeſima ſcema il moto verticale laſciando intatto l'orizzontale; Onde il lato O L, che eſprime la forza verticale è minore del lato

O S.

OS. Onde l'angolo OBL sarà minore dell' angolo OBS. Questo piegamento della linea LB, e quest' angolo LBO minore è l' angolo di rifrazione di questo corpo.

Si spiega ancora perchè il raggio luminoso passando dall'aria all'acqua pieghi il suo cammino in tal modo, che l'angolo RBO sia maggior dell'angolo SBO. Poichè tanto secondo i Neutoniani, che secondo i Cartesiani il moto verticale si accresce al raggio nell'acqua. Onde il lato RO sarà maggiore del lato SO, e così l'angolo RBO maggiore dell'angolo SBO.

Uso della Prop. XIX.

Siano BA, OC le sponde parallele di un canale, e voglia trovarsi la distanza inaccessibile AB. Costruzione: A qualunque punto D della sponda OD si osservi l'angolo BDO, che forma il raggio visuale BD colla sponda DO. Indi procedendo dal punto D verso C si trovi un punto C, nel quale la visuale AC faccia colla CO l'angolo stesso, che la BD faceva colla DO. Dico, la linea CD essere uguale alla AB inaccessibile. Poichè saranno non solamente le due linee AB, CO, ma ancora le altre due CA, BD parallele. Onde CD sarà (a) uguale ad AB.

Tav. IV. Fig. XV.

(a) Per la Prop.

Uso della Proposizione XXI., e suoi Corollarj.

Questa proposizione può dirsi, ed è in fatti benemerita di tutta l'Astronomia, per la quale il Signor Nevvton dimostra, che se tutti i pianeti avessero gravità verso il sole, e fossero stati la prima volta spinti con qualunque direzione descriverebbero una curva concava verso il sole, nella quale spazj
Tav.IV. uguali saranno scorsi in tempi uguali. Sia S
Fig. XVI. il sole, A un qualunque pianeta, a cui sia impresso un moto secondo la direzione AZ. Si dice, primo che la curva BODE sia concava verso il punto S. Si dice secondariamente, che gli spazj BSO, OSD, DSE, ec. descritti dalla retta, che congiugne il pianeta al sole, in tempi uguali, sono uguali. Poichè se il pianeta posto nell' punto A non avesse alcuna gravità descriverebbe la linea AB in un dato tempo. Or essendo in B abbia il moto BC proveniente dalla gravità. Si pigli la linea BG uguale a BA, e dal punto G si conduca la linea GO parallela alla BS. Dal punto C si tiri CO parallela a BG, e si conduca la GS. Il corpo spinto nel punto B dalle due forze BC della gravità, e BG della direzione descriverà la diagonale BO nel tempo stesso, in cui, se la gravità mancasse, descriverebbe la BG uguale a BA. All' istesso modo essendo nel

punto

punto O ſpinto da due forze ſcorrerà la diagonale O D, e dall' punto D la diagonale D E. E' chiaro primieramente che la linea O B è inclinata alla B A, e piega verſo il punto S, la linea D O è inclinata alla O B, e piega verſo il punto S, e ſimilmente la E D è inclinata alla D O, è piega verſo il punto S. Onde ſe le diagonali B O, O D, D E, ec. ſi concepiſcano accreſciute di numero in infinito, e ſcemate all' infinito di grandezza in una curva, la quale tutta così piegherà verſo il punto S, come piegano le diagonali. A dimoſtrar la ſeconda parte ſi conſiderino i due triangoli S O B, S G B, che avendo la ſteſſa baſe, ed eſſendo chiuſi da due parallele S B, Q G ſono uguali; Ma ancora i due triangoli G S B, B S A ſono uguali. Onde il triangolo O S B è uguale al triangolo B S A. Ma queſti due triangoli ſon deſcritti in tempi uguali, perchè il pianeta nel tempo ſteſſo ſcorre la diagonale B O, in cui ſcorrerebbe la B G, cioè la A B uguale a B G. Onde il pianeta colla retta, che al ſole lo congiunge, in tempi uguali deſcriverebbe due ſpazj uguali. Similmente dimoſtraſi che nel tempo ſteſſo, in cui il pianeta ſcorre lo ſpazio O S B ſcorre ancora l'altro uguale D S O, e nel tempo ſteſſo il quarto ſpazio E S D uguale. Onde generalmente in tempi uguali deſcrive uguali ſpazj nella curva B O D E, ec., che ſi concepiſce come

com-

composta di infinite piccolissime diagonali B O, O D, D E, ec. Ora questa universal legge si conforma talmente a tutti i pianeti, e Mercurio, e Venere, e Marte, e Giove, e Saturno, che quanto più si osservano i loro moti, tanto più trovansi ubbidienti a questa universal regola; Nè solo i pianeti, ma le comete ancora vi si soggettano.

Usi della Proposizione XXII.

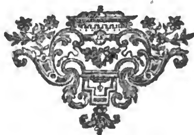
Di questo ammirabile ritrovamento di Pittagora sono innumerabili gli usi in tutte le parti della Matematica. Il Signor Cartesio nella lettera 80 del terzo tomo protesta, che egli in tutta la sua Geometria, nella quale scioglie intrigatissimi problemi non si serve di altri teoremi, se non che di questa proposizione 22, e della proposizione quarta del libro sesto di Euclide. Noi ce ne varremo per ritrovare l'interna altezza perpendicolare di una piramide, di cui possa misurarsi la
Tav.IV. Fig. XVII. base, e l'altezza laterale obliqua. E per adattare l'uso a una cosa reale, sia A G O quella vastissima piramide dal Gemelli riportata nella sua storia. Questa è quella piramide, che è più vicina al gran Cairo dalla parte Settentrionale. Essa ha ciascun lato della sua base, come S O, B A, S A, O B

di

di 682 piedi parigini. Se un lato B A ſi divide per mezzo in D, e dal punto D ſi conduce D G, eſſo è di 621 piede, ſi cerca l'altezza interna perpendicolare G P. Cadendo il punto P in mezzo alla baſe, ſe per eſſo ſi tirano le due linee N E, R D, di cui la prima ſia parallela ad A B, la ſeconda ad O B, il quadrato O A ſi dividerà in quattro parti, e la linea P D è uguale alla linea E B, cioè alla metà del lato O B. Sarà dunque P D di 341 piede. Si conſideri il triangolo rettangolo G P D, di cui il lato G D è cognito, eſſendo di 621 piede, il lato P D è pur cognito, eſſendo di 341 piede. Or ſaranno pure cogniti i quadrati del lato G D, e del lato P D. Se dunque dal quadrato del lato G D ſi ſottragga il quadrato del lato P D, l'avanzo è uguale al quadrato del lato G P. Poichè eſſendo G D quadrato uguale a' quadrati della G P, e della P D, ſe da ambe le parti ſottraggaſi il quadrato della P D, gli avanzi ſaranno uguali. Onde ſottratto dal quadrato della G D il quadrato della P D, l' avanzo è uguale al quadrato dell'altezza perpendicolare cercata, del qual quadrato il lato ſarà la medeſima altezza, che fatto il calcolo rieſce di quaſi 519 piedi. Che ſe ſi foſſe data l' altezza perpendicolare P G, e il lato P D, la ſomma di queſti due quadrati ſomminiſtrerebbe il quadrato della G D. So- Tav. IV.
migliantemente data l' altezza A B d' una Fig. XVIII.

torre

torre, che sia di sessanta passi, la distanza orizzontale BC, che sia d'ottanta, si trova la distanza inaccessibile CA, il cui quadrato è uguale alla somma degli altri due; onde CA sarà di cento passi.



ELEMENTO

SECONDO.

G

LEZIONE UNICA
DEL SECONDO
ELEMENTO.

1. Che sia rettangolo. 2. Come si debba intendere, che il rettangolo sia da' due lati contenuto. 3. Perchè il rettangolo non si possa dire rigorosamente esser da' due lati misurato. 4. Che il rettangolo equivale alla moltiplicazione numerica. Ed in qual senso ciò s'intenda.

1 POichè nel primo Elemento si sono i triangoli l'uno all'altro, e i medesimi triangoli a' parallelogrammi paragonati, si passa nel secondo a trattar; come si dice, delle potenze delle linee diritte, cioè de' quadrati delle linee diritte divise, o indivise, e de' parallelogrammi rettangoli delle medesime parti. Parallelogrammo rettangolo è un parallelogrammo di angoli retti, o ciò, che è lo stesso, contenuto da linee, che formano angoli retti. Il parallelogrammo rettangolo spesso si chiama *rettangolo* senz'altro; e benchè rettangolo sia ancora un triangolo, e tal pure esser possa una qualunque figura di più lati, pure a' Geometri è piaciuto d'intendere, e significare colla voce *rettangolo* il solo parallelogrammo di angoli retti, forse

per questa ragione, che nel triangolo un solo angolo può esser retto, e negli altri poligoni puote un angolo esser retto, senza che l'altro pur lo sia; laddove nel parallelogrammo rettangolo è necessario che tutti quattro gli angoli siano retti, e se uno non lo è, o non è parallelogrammo, o essendo tale non potrà avere alcun angolo retto. Le quali cose è agevole a dimostrare.

2 Dicesi il parallelogrammo rettangolo esser contenuto sotto a due linee, che comprendono un angolo retto, e ciò niente altro significa, se non che un rettangolo esser determinato, esser generato, esser misurato da due linee contenenti l'angolo retto. Esso è determinato, poichè essendo esso una superficie piana, e dotato di sola lunghezza, e larghezza, due linee delle quali una determini la sua lunghezza, e l'altra la sua larghezza, determineranno lo stesso rettangolo. Poichè in esso una sola è la larghezza, essendo essa uguale in ciascuna parte. Se la larghezza sia B A, questa linea B A sarà uguale a tutte le linee *bb*, *bb* tirate ad essa parallele. (*a*) Una sola è la lunghezza per la stessa ragione. Poichè se A C sia lunghezza tutte le linee *ac*, tirate ad A C parallele sono ad essa uguali. (*b*) Dal che nasce, che qualunque rettangolo la cui larghezza,

Tav. IV. Fig. I.

(*a*) Def. 20. (*b*) Ivi.

za, e lunghezza sia uguale alla AB, e alla BD, sarà uguale al rettangolo ABDC, il quale può anche chiamarsi il rettangolo AD, o pure CB, pigliando le lettere giacenti agli angoli opposti. Questo rettangolo è anche generato dalle due linee AB, BD. Imperocchè se si concepisca la linea BA scorrere verso la linea CD per modo, che mantenendosi sempre colla sua estremità B nella linea BD essa resti sempre perpendicolare alla stessa BD, nel proceder, che essa fà per la linea BD col suo vestigio descriverà, e genererà il parallelogrammo rettangolo AD, sicchè quando il punto B arriverà al punto D, tutto questo rettangolo sarà già formato. Per lo stesso modo, se stando immobile la BA, la BD scorra sopr' essa, come dianzi la AB si è fatta scorrere per la BD, si formerà, e genererà lo stesso rettangolo. Diconsi amendue le linee AB, BD generare il rettangolo, perchè generandolo una di esse col suo flusso, e vestigio, l'altra la dirige per modo, che più tosto generi questa figura, che un altra. In fatti, se il flusso della AB fosse regolato, o da una linea maggiore, o minor di BD, o da una curva uguale alla BD, sarebbe generato un rettangolo o maggiore, o minor di AD, o vero un parallelogrammo mistilineo, come è il parallelogrammo PMON, il qual però non sarà rettangolo. Poichè il flusso della linea MP sopra la curva MO fatto in tal modo, che sem- Tav. IV. Fig. II.

pre la M P si conservi parallela alla N O, mentre col suo punto M passa per la curva M O, genererà altresì il parallelogrammo mistilineo P O, come dianzi è stato generato il rettilineo A D. Non così propriamente, e rigorosamente dicesi il rettangolo da due linee misurato, come esso dicesi da esse linee determinato, e generato. Poichè le linee possono propriamente, e giustamente parlando essere di una superficie la determinazione, e la genesi, ma non possono essere di essa superficie vera misura.

3 Il che è necessario attentamente avvertire per non urtare come alcuno hà fatto in grossissimi abbagli. La misura di sua natura dee essere omogenea al misurato, o ciò, che è lo stesso, della stessa natura della cosa misurata. A voler misurare una lunghezza basta una misura, che sia essa stessa lunghezza, ma a voler misurare una superficie, che hà ancora larghezza, una misura, che sia sola lunghezza non vale. Or sola lunghezza essendo le linee, come mai esse potranno propriamente dirsi misura di ciò, che hà larghezza altresì? Bisognerà pertanto alcuna larghezza aggiugnere alle linee, perchè esse siano propria misura del piano, cioè bisogna pigliare una superficie, piccola quanto si voglia, ma pur superficie, per avere una propria misura di un piano. Bisogna in oltre pigliare una tal piccola superficie, che sia commensurabile collo stesso rettangolo, cioè,

che

che alcune volte presa adequi tutto intero il rettangolo, senza che punto ne avanzi. Questa tal piccola superficie avremo noi, se piglieremo due linee A B, B D di tal lunghezza, che abbiano una comune misura; cioè una tal lineetta B *d*, che alcune volte ripetuta scorra tutta la linea B D, e ancora tutta la linea B A. Per esempio ripetuta nove volte scorra tutta la B D, e ripetuta quattro volte tutta la B A. Or dico, che il quadrato della lineetta B *d* è vera, e propria misura del parallelogrammo rettangolo A D. Poichè essa è superficie minore, che alcune volte presa adequa una maggiore. Presa nove volte adequa il rettangolo B D *a a*, e presa quattro volte adequa il parallelogrammo B *d d* A. Se poi il numero delle volte, che essa entra nel rettangolo B *d d* A si moltiplica pel numero delle volte, che essa entra nel rettangolo B D *a a* si formerà l' intero rettangolo A D. Poichè tante volte il quadrato della lineetta B *d* entra in ciascun rettangolo *a a b b*, *b b c c*, *c c* C A, quante volte entra nel rettangolo B D *a a*. Onde tante volte si debbon contare i quadrati del rettangolo B D *a a*, quante volte la lineetta B *d* entra nell' altro lato B A, una volta, se vi entra una sola volta, due, se vi entra due volte, e quattro, se quattro volte, o ciò, che è lo stesso i quadrati, che entrano nel rettangolo B D *a a* van moltiplicati pe' quadrati, che entrano nell' altro B *d d* A. Diremo

Tav. IV. Fig. III.

adunque i piccoli rettangoli B *d d* A, B D *a a* esser vera misura del grande B C. Or si consideri, che questi rettangoli possono impiccolirsi all' infinito, poichè dividendo, e suddividendo all' infinito la lineetta B *d*, saranno sempre più piccoli tali rettangoli, e sempre più piccolo il primo quadrato, che si forma sulla B *d*, sempre però il numero de' quadrati, che possono alzarsi sulla B D, moltiplicato pel numero di quegli, che sulla B A possono alzarsi, formerà tutto il parallelogrammo C B.

4 Ed ecco perchè il rettangolo si dice essere equivalente alla moltiplicazione numerica. Come il numero de' quadratelli contenuto nella colonna A B *d d* moltiplicato pel numero de' quadratelli contenuto nella colonna B D *a a* somministra un tal numero di quadratelli, che tutti insieme pareggiano il rettangolo B C, così un qualunque numero moltiplicato per un altro forma quel, che chiamasi *prodotto numerico*. Dal che voi argomenterete, che propriamente parlando mal si chiama un lato A B *equivalente* ad uno de' due numeri moltiplicandi, e l'altro B D all'altro numero. Imperocchè una linea moltiplicata per l'altra somministra per prodotto un altra linea. Tre palmi di lunghezza moltiplicati per 8 palmi di lunghezza non possono somministrar altro, che un' altra lunghezza di 24 palmi. Onde i soli quadratelli racchiusi nel rettangoletto A *d d* B possono bene chiamarsi

marsi equivalenti ad uno de' numeri moltiplicanti, e gli altri contenuti nel rettangoletto B D *a a* equivalenti all' altro numero. Un altra convenienza, ed Analogia il prodotto numerico può avere rispetto al rettangolo Geometrico. Se voi piglierete due numeri qualunque, i quali vogliate moltiplicare l'uno per l'altro, sempre troverete, che l'unità tante volte si contiene in uno di que' numeri, quante volte l'altro si contien nel prodotto. Per esempio siano tali numeri il 4, e il 9, il cui prodotto è 36. Tante volte l'uno è contenuto nel 4, che è uno de' moltiplicanti, quante volte il 9, che è l'altro, è contenuto nel 36, che ne è il prodotto. Quattro volte l'unità si contien nel 4, e quattro volte il 9 nel 36. Se voi farete una lunga induzione, troverete, che la cosa ne' numeri và sempre così, ed a suo tempo ne intenderete il perchè. Ora sappiate, che appunto uno di que' quadratelli *a* B *d o* del rettangolo rappresenta l'unità, o si piglia per l'unità. Ed accade appunto in questo rettangolo, che quante volte un quadratello è contenuto ne' quadratelli della colonna A B *d d*, tante volte i quadratelli dell'altra colonna B D *a a* son contenuti in tutti i quadratelli, che formano il rettangolo A B D C, cioè quattro volte nel caso nostro.

Ecco pertanto, che io vi ho dichiarato ciò, che in questa lezione aveva proposto.

PRO-

PROPOSIZIONE I.

Se vi son due linee diritte, delle quali la prima sia segata in quante parti si voglia, e la seconda resti intera, dico, che il rettangolo contenuto sotto quelle due linee diritte è uguale alla somma de' rettangoli, che son contenuti sotto la linea intera, e ciascuna parte della segata.

Spiegazione.

Tav. IV. Fig. IV. Sia la linea A B segata in quante parti si voglia A D, D C, C B. Sia un' altra linea *a e* non segata; Dico che se di queste due linee si forma il rettangolo A E B H, esso è uguale a tutti i rettangoli presi insieme; de' quali il primo sia contenuto sotto l' intera *e a*, e la prima porzione A D; il secondo sotto la stessa intera, e la seconda porzione D C, il terzo sotto l' intera, e la terza porzione C B.

Costruzione.

Si alzi perpendicolarmente il lato A E sopra la A B, il qual lato A E sia uguale ad *a e*, e da' punti, D, C, B si alzin delle parallele alla A E, cioè delle perpendicolari alla A B, e formisi il rettangolo E B.

Dimostrazione.

Il solo rettangolo E B è uguale a tre rettangoli E D, F C, G B (*a*)

(*a*) Assiom. 9.

Ma il solo rettangolo E B è il rettangolo contenuto sotto le due linee A B, *a e*, e i tre

tre rettangoli ED, FC, GB son contenuti sotto la linea intera, e ciascuna parte della segata.

Poichè AE è uguale all' intera *ae* (*b*) e le DF, CG essendo uguali alla AE (*c*) sono uguali alla *ae* (*d*). Onde il rettangolo EB è contenuto dalle due linee, e i tre rettangoli ED, FC, GB, dall' intera, e dalle porzioni della AB.

(*b*) *Per la Cost.*
(*c*) *Definiz.* 20.
(*d*) *Assiom.* 1.

Onde il solo rettangolo EB sarà uguale a' tre rettangoli contenuti sotto l'intera, e ciascuna parte della segata. Ciò ec.

Esempio numerico.

Sia la AB = 15. AD = 5. DC = 4, e la CB = a sei palmi. Inoltre sia la linea intera *ae* di palmi 7 sarà il rettangolo EB di 105 palmi.

In oltre sarà il rettangolo di 5 in sette di palmi	35
Il rettangolo di 4 in sette sarà di palmi	28
Il rettangolo di sei in 7 sarà di palmi	42

De' quali facendo la somma, troveremo, come dianzi palmi 105 uguali al rettangolo EB.

PROPOSIZIONE II.

Se una linea retta sia segata in un qualunque punto, i due rettangoli che forman ciascuna delle due parti in tutta la linea sono uguali al quadrato di tutta la linea retta.

Spiegazione.

Tav.IV. Fig.V. Sia la linea D E segata nel punto C in qualunque modo, dico, che il rettangolo contenuto sotto una parte DC, e tutta la DE, insieme col rettangolo contenuto sotto l'altra parte C E, e la stessa DE, resta uguale al quadrato di tutta la D E. Poichè pongasi la DO uguale alla DE.

Dimostrazione.

Il rettangolo dell' intera DO nella segata D E è uguale a' due rettangoli dell' intera DO nelle due parti DC, CE (*a*).

(*a*) Profosiz.1.

Ma il rettangolo dell'intera DO nella segata D E è uguale al quadrato della stessa DE.

Poichè per la costruzione DO è uguale alla DE. Onde OE è il quadrato della DE (*b*)

(*b*) Defin. 21.

Onde i due rettangoli delle due parti DC, CE in tutta la DE sono uguali al quadrato di tutta la DE. Ciò ec.

Esem-

Esempio numerico.

Sia la DE di 12. palmi. La parte DC di 3. palmi, e la CE di 9.

Sarà il rettangolo di tutta in una parte di 3 palmi di 36

Sarà il rettangolo di tutta nell' altra parte di 9 palmi, di 108

Ambidue insieme formano palmi 144 quale è appunto il quadrato di 12.

PROPOSIZIONE III.

Se una linea retta sia segata in qualunque modo in un punto, il rettangolo compreso sotto tutta essa linea, e una delle parti, è uguale al quadrato della stessa parte, e al rettangolo di una parte coll' altra.

Spiegazione.

La linea AB sia segata nel punto C, dico, che il rettangolo contenuto sotto tutta la AB, e la parte AC è uguale al quadrato della stessa AC insieme col rettangolo della AC nella CB. Poichè si alzi il lato AD uguale ad AC, e si compisca il rettangolo DB. Tav.IV. Fig. VI.

Dimostrazione.

Il rettangolo compreso sotto la A B, e la A D è uguale a' due rettangoli compresi sotto le due parti A C, C B, e l'intera A D. (a)

(a) Prop. 1.

Ma i due rettangoli compresi sotto le due parti A C, C B, e l'intera A D sono uguali al quadrato della A C, e al rettangolo della A C nella C B.

Poichè A D per costruzione è uguale alla A C, onde il rettangolo della D A nella A C è lo stesso, che il quadrato della A C.

Onde il rettangolo compreso sotto la A B, e la A D, o ver la A C, è uguale al quadrato della parte A C, insiem col rettangolo delle due parti A C, C B. Ciò ec.

Esempio numerico.

Sia A B di 12 palmi, A C di 5 palmi. Sarà C B di 7 palmi. Il rettangolo di tutta la A B nella sua parte A C sarà di 60 palmi

Il quadrato della parte A C sarà di	25 palmi
Il rettangolo delle parti, cioè di 5 in 7 sarà di	35 palmi
La somma sarà di	60 palmi, come dianzi.

PROPOSIZIONE IV.

Se una linea retta sia segata in un qualunque punto, sarà il quadrato di tutta essa linea uguale a' quadrati delle parti, insieme con due rettangoli delle parti fra di loro. Tav. IV. Fig. VII.

Spiegazione.

Sia la linea A B segata in un punto C, dico, che il quadrato di essa tutta A B è uguale a' quadrati delle sue parti A C, C B, insieme col rettangolo A C in C B preso due volte. Poichè da' due punti A, B si alzino le due linee A D, B E, ciascuna uguale alla B A, e si compisca il quadrato D B.

Dimostrazione.

Il quadrato della intera A B è uguale a' rettangoli delle parti A C, C B in tutta la A B (*a*), cioè al rettangolo C A in A B, e C B, in B A. (a) Prop. 1.

Ma il rettangolo della C A in A B è uguale al quadrato della A C, e al rettangolo della A C nella C B, e similmente il rettangolo della C B nella B A è uguale al quadrato della C B, e al rettangolo della C B nella A C (*b*). (b) Prop. 3.

Onde il quadrato di tutta la A B è uguale esso solo al quadrato della parte A C insieme col rettangolo della A C nella C B, insie-

insieme col quadrato della CB insieme col rettangolo della BC, nella CA, cioè a' quadrati delle parti insieme con due rettangoli delle parti fra loro. Ciò ec.

Esempio numerico.

Sia tutta la AB di 9 palmi. AC sia di 3, e CB di 6 palmi.

Sarà il quadrato di tutta AB di	81 palmo
Il quadrato della AC sarà di	9 palmi
Il quadrato della CB sarà di	36 palmi
Un rettangolo di AC in CB sarà di	18 palmi
Un'altro pur di	18 palmi
La somma sarà di	81 palmo, come dianzi.

PROPOSIZIONE V.

Se una linea diritta sarà segata in due parti uguali, e in altre due disuguali, sarà il rettangolo contenuto sotto le parti inuguali insieme col quadrato della parte di mezzo, uguale al quadrato della metà.

Spiegazione.

Sia la linea A B divisa in C in due parti uguali, e divisa in D in due parti disuguali, dico che il rettangolo contenuto sotto le parti disuguali A D, B D insieme col quadrato della CD, che resta in mezzo, è uguale al quadrato della metà CB. Tav. IV. Fig. VIII.

Dimostrazione.

Il rettangolo della AD nella DB è uguale al rettangolo della AC, nella BD, insieme col rettangolo della CD nella DB (*a*), cioè al rettangolo della CB nella DB, insiem col rettangolo della CD nella DB.

(*a*) Prop. 1.

Poichè essendo la linea AC uguale alla CB, lo stesso è il rettangolo della AC nella DB, che il rettangolo della CB nella stessa DB.

Ma il rettangolo della CB nella BD è uguale al quadrato della BD insieme col rettangolo della BD nella DC (*b*).

(*b*) Prop. 3.

Onde il rettangolo della AD nella BD è uguale al quadrato della B D, al rettangolo della BD nella DC, e a un'altro rettangolo della CD nella DB.

H On-

Onde aggiugnendovi da ambe le parti il quadrato dell'intermedia CD, sarà il rettangolo della AD, nella DB insieme col quadrato della CD, uguale al quadrato della DB, al quadrato della CD, e a' due rettangoli della CD nella DB (c).

(c) Assiom. 2.

Ma questi due quadrati con questi due rettangoli sono uguali al quadrato della CB (d).

(d) Propos. 4.

Onde il rettangolo della AD nella DB col quadrato dell' intermedia CD è uguale al quadrato della metà, cioè della CB. Ciò ec.

Esempio numerico.

Sia la linea AB di 12 palmi divisa per metà in C, e disugualmente in D, e sia DB di 2 palmi. Onde AD sarà di 10 palmi, e CD di 4 palmi.

Sarà il rettangolo di 10 in 2 di 20 palmi

Sarà il quadrato di 4 di 16 palmi

Somma di 36 palmi, di quanti palmi è appunto il quadrato della metà, cioè di 6.

PROPOSIZIONE VI.

Se una linea diritta dividasi in due parti uguali, e ad essa si aggiunga un' altra linea diritta, dico, che il rettangolo compreso sotto la linea composta di tutta la prima, e dell' aggiunta come un lato, e dell' aggiunta, come un' altro lato, insieme col quadrato della parte di mezzo, è uguale al quadrato della linea composta della metà della prima, e dell' aggiunta.

Spiegazione.

Sia la linea A B divisa in C in due parti uguali, e ad essa si aggiunga la linea A D, dico, che il rettangolo della linea B D come un lato, e della A D come l'altro, insieme col quadrato della A C, è uguale al quadrato della C D, che è una linea composta della C A metà di B A, e dell' aggiunta A D. Tav. IV. Fig. IX.

Costruzione.

Si faccia la B E uguale all' aggiunta A D. (*a*)

(*a*) Propos. 1. lib. 1.

Dimostrazione.

Il rettangolo della E A nella A D insieme col quadrato della A C è uguale al quadrato della C D.

Poichè essendo B E per costruzione uguale ad A D, e C B uguale a C A per l' ipotesi, sarà la linea D E (*b*) divisa in due parti uguali in C, e in due parti disuguali in A. Onde ne siegue l' asserzione posta (*c*).

(*b*) Assiom. 2.

(*c*) Per la Propos. 5.

Ma il rettangolo della E A, nella A D in-

insieme col quadrato A C è uguale al rettangolo della B D nella A D insieme col quadrato della A C.

(d) Assiom. 2. Poichè la linea B D è uguale alla E A (d) e il lato A D è lo stesso nell' uno, e nell' altro rettangolo.

Onde il rettangolo della B D nella A D insieme col quadrato della A C è uguale al quadrato della C D. Ciò ec.

Esempio numerico.

Sia A B di 14 palmi, a cui si aggiunga A D di 2 palmi. Sarà la D B di 16 palmi. La A C di 7 palmi, la C D di 9 palmi. Onde il rettangolo di B D in A D cioè di 16 in 2 sarà di 32 palmi

Il quadrato della A C, cioè di 7 palmi sarà di 49 palmi

La somma sarà di 81 palmo, come è appunto il quadrato della C D, che vien di 9 palmi.

PROPOSIZIONE VII.

Se una linea retta sia comunque segata in un punto, saranno i quadrati di tutta la linea, e di una delle due parti, uguali a due rettangoli compresi sotto tutta la linea come un lato, e l' una delle due parti come l' altro insieme col quadrato dell' altra parte.

Spiegazione.

Tav. IV. Fig. X. Sia una linea A B divisa comunque in C, dico,

dico, che il quadrato della A B insieme col quadrato di una sua parte A C è uguale a due rettangoli della A B nella stessa A C, insieme col quadrato dell'altra parte C B.

Dimostrazione.

Il quadrato di A B insieme col quadrato della A C sono uguali a due rettangoli della A C, nella C B, insieme con due quadrati della A C, insieme con un quadrato della C B.

Poichè il quadrato di A B è uguale (a) al quadrato di A C, insieme con due rettangoli della A C, nella C B, insieme col quadrato della C B. Onde aggiugnendovi di comune il quadrato di A C, saranno (b) i due quadrati della A B, e della A C uguali a' due quadrati della A C, insieme con due rettangoli della A C nella C B, insieme con un quadrato della C B.

(a) *Per la Propos.* 4.
(b) *Assiom.* 2.

Ma due rettangoli della A C nella C B insieme con due quadrati della A C, sono uguali a due rettangoli della A B nella A C.

Poichè un rettangolo della A C nella C B insieme con un quadrato della A C, è uguale a un rettangolo della A B nella A C (c): Onde due rettangoli della A C, nella C B, con due quadrati della A C sono uguali a due rettangoli della A B nella A C (d).

(c) *Propos.* 3.
(d) *Assiom.* 2.

Onde il quadrato della A B insieme col quadrato della A C è uguale a due rettangoli di tutta la A B in una parte A C, insieme col quadrato dell'altra parte C B. Ciò ec.

Esempio numerico.

Sia A B di 9 palmi. C B sia di 3 palmi, sarà A C di 6 palmi. Sarà dunque il quadrato della A B di 81 palmo
Il quadrato della A C di 36 palmi
Somma di 117 palmi.

In oltre saranno due rettangoli di A B in A C, cioè di 9 in 6 di 108 palmi
Sarà il quadrato dall' altra parte C B, cioè di 3 9 palmi
Somma sarà di palmi 117 come dianzi.

PROPOSIZIONE VIII.

Se una linea retta sia segata in due parti uguali, e ad essa si aggiunga un altra linea retta, sarà il rettangolo contenuto dalla linea composta della metà della prima, e dell' aggiunta come un lato, e dalla metà della prima, come un' altro, il rettangolo, dissi, quattro volte preso, insieme col quadrato dell' aggiunta, uguale al quadrato di tutta la composta.

Spiegazione.

Tav.IV. Fig.XI. Sia una linea AB segata per metà in C, a cui si aggiunga un'altra linea B D qualunque, dico, che il rettangolo della D C nella C A quattro volte preso insieme col quadrato della BD, è uguale al quadrato di tutta la linea AD.

Dimostrazione.

Il quadrato della C D insieme col quadrato della CB è uguale a due rettangoli della DC nella CB insieme col quadrato della BD (a).

(a) Prop. 7.

Ma

Ma il quadrato della CB è uguale al quadrato della CA, e i due rettangoli della DC nella CB sono uguali a due rettangoli della stessa DC nella AC.

Poichè essendo per l'ipotesi CB uguale a CA, sarà pure CB quadrato uguale a CA quadrato e per la stessa uguaglianza il rettangolo DCB pareggerà il rettangolo DCA. Onde due a due (b).

(b) Assiom. 2.

Onde il quadrato della CD insiem col quadrato della CA sarà uguale a due rettangoli della DC nella CA insieme col quadrato della BD.

Onde aggiugnendovi da amendue le parti altri due rettangoli della DC nella CA, sarà il quadrato della CD, col quadrato della CA, con due rettangoli DCA, cioè (c) il quadrato della sola AD, uguale a' quattro rettangoli della DC nella CA insieme col quadrato BD. Ciò ec.

(c) Propos. 4.

Esempio numerico.

Sia la AB di dieci palmi, a cui si aggiunga la BD di sei palmi. Sarà la DC di 11 palmi, la DA di 16 palmi. Il cui quadrato sarà di 256 palmi

Sarà un rettangolo di DC, in CA, cioè di 11 in 5 di 55 palmi, che moltiplicando per 4 — 4

formerà 220 palmi

In oltre sarà il quadrato di BD, cioè di 6 di 36 palmi

La somma darà 256 palmi, come dianzi.

PROPOSIZIONE IX.

Se una linea diritta sia segata in due parti uguali, e in due inuguali saranno i quadrati delle parti inuguali doppj de' quadrati della metà, e della parte di mezzo.

Spiegazione.

Tav.IV. Fig.XII Sia la linea diritta A B divisa in due parti uguali in C, e in due disuguali in D, dico, che i due quadrati della A D, e della D B sono il doppio de' due quadrati della C B, e della C D.

Dimostrazione.

Essendo il quadrato della A D uguale a' quadrati della A C, e della C D con due rettangoli della A C nella C D (*a*), sarà il quadrato della A D, aggiuntovi il quadrato della D B, uguale al quadrato della A C, o ver della C B, insieme con due rettangoli della A C nella C D, o vero della B C nella C D, insieme col quadrato della C D, e lo stesso quadrato della D B (*b*).

(*a*) Propos. 4.

(*b*) Assiom. 2.

Ma i due rettangoli della B C nella C D sono uguali a due quadrati della C D, insieme con due rettangoli della B D nella D C (*c*).

(*c*) Propos. 3.

Onde il quadrato della A D insieme col quadrato della D B sono uguali al quadrato della C B, insieme con tre quadrati della C D, due rettangoli della C D in D B, insieme con un quadrato della D B.

Or

Or un quadrato della CD, due rettangoli della CD, nella DB, e un quadrato della DB sono uguali a un quadrato della CB (*d*). (d) Prop. 4.

Onde due quadrati della CB, insieme con due quadrati della CD sono uguali al quadrato della AD insieme col quadrato della DB, e un quadrato della CB con un quadrato della CD son la metà de' quadrati della AD, e della DB. Ciò ec.

Esempio numerico.

Sia AB di 12 palmi, e BD di due palmi. Sarà CB di 6 palmi, CD di quattro palmi, ed AD di 10 palmi. Onde per la proposizione

Sarà il quadrato di AD di	100	palmi
Il quadrato della DB di	4	palmi
Somma di	104	palmi
In oltre il quadrato della metà CB sarà di	36	palmi
Il quadrato della CD sarà di	16	palmi
La somma sarà di	52	palmi, che è
la metà di	104	palmi.

PROPOSIZIONE X.

Se una linea diritta sia segata in due parti uguali, e le si aggiunga un' altra linea diritta, saranno i quadrati di tutta la composta, della aggiunta doppj de' quadrati descritti sopra la metà, e sopra una linea composta della metà, e dell' aggiunta.

Spiegazione.

Tav. IV. Fig. XIII. Sia la linea A B divisa in C in due parti uguali, e le si aggiunga la linea BD, dico, che i due quadrati della A D, e della BD sono il doppio de' due quadrati della CB metà, e della CD composta della metà, e dell' aggiunta.

Poichè si faccia A E uguale alla BD.

Dimostrazione.

Essendo la linea ED divisa in parti uguali in C, e disuguali in B, saranno (*a*) i due quadrati della EB, e della BD doppj de' due quadrati della CB, e della CD.

(*a*) Prop. 9.

Ma i due quadrati della EB, e della BD sono uguali a' due quadrati della A D, e della stessa BD.

Poichè essendo la linea E A per costruzione uguale a BD aggiunto di comune la A B, sarà la E B uguale alla A D. (*b*) Onde il quadrato al quadrato.

(*b*) Assiom. 2.

Onde i due quadrati della AD, e della B D sono pure il doppio de' quadrati della CB, e della CD. Ciò ec.

Esem-

Esempio numerico.

Sia AB di otto palmi, e la aggiunta BD di due. Sarà AD di 10 palmi, CD di 6.

Onde sarà il quadrato di A D cioè di 10	100	palmi
Il quadrato di B D cioè di 2	4	palmi
Somma	104	palmi
Il quadrato della C B sarà di	16	palmi
Il quadrato della C D sarà di	36	palmi
Onde la somma di	52	palmi, che è
la metà di	104	palmi.

PROPOSIZIONE XI.

Segare una data linea diritta per tal modo, che il rettangolo compreso sotto tutta essa linea, e una sua parte, sia uguale al quadrato dell'altra parte.

Spiegazione.

Sia la data linea A C, la quale si abbia a segar per modo nel punto B, che il rettangolo della A C nella C B uguagli il quadrato dell'altra parte A B. Tav. IV. Fig. XIV.

Costruzione.

Descrivasi sopra la data A C il suo quadrato E C (a), il cui lato E A dividasi per metà in D (b) dal qual punto si conduca la linea D C, a cui facciasi uguale la linea D N. Sopra la A N descrivasi il quadrato

(a) Propos. 23. del lib. 1.

(b) Propos. 10. lib. 1.

AO,

A O, il cui lato A B determinerà il punto B in tal modo, che A B quadrato sarà uguale al rettangolo della A C nella C B. Si compisca il rettangolo S N.

Dimostrazione.

Il quadrato della D N, cioè il quadrato della D C, o ciò, che è lo stesso i due quadrati (*c*) della D A, e della A C, sono uguali al rettangolo della E N nella N A insieme col quadrato della D A.

(*c*) Propos. 22. lib. 1.

Poichè la linea E A è divisa in D in due parti uguali, e le si aggiugne la linea A N. Onde (*d*) sarà il rettangolo E N A col quadrato della A D uguale al quadraro della D N, che per costruzione è uguale a D C, il cui quadrato è uguale a' due quadrati della D A, e della A C.

(*d*) Propos. 6. del 2.

Onde tolto il quadrato comune della A D da ambe le parti, sarà (*e*) il rettangolo della E N nella A N, cioè il rettangolo E O, uguale al quadrato della A C, cioè al quadrato E C.

(*e*) Assiom. 3.

E togliendo di comune il rettangolo E B, gli avanzi, cioè il quadrato A O sarà uguale al rettangolo S C, cioè il quadrato della A B uguale al rettangolo della B C nella C A, che è uguale a C M.

Avvertimento.

Questo Problema non può sciorsi in numeri. Poichè niun numero può segarsi in tal modo, che il prodotto di tutto esso numero in una sua parte uguagli il quadrato dell' altra. Di questa impossibilità dirassi, ove sarà più opportuno.

PRO-

PROPOSIZIONE XII.

In un triangolo ottusangolo il quadrato del lato opposto all' angolo ottuso avanza i due quadrati de' lati, che lo comprendono, di due rettangoli di uno di tali lati, e una linea frapposta tra la perpendicolare allo stesso lato steso indefinitamente, e lo stesso lato.

Spiegazione.

Sia un triangolo ottusangolo BCA, in cui uno de' due lati comprendenti l'angolo ottuso, come il lato BC stendasi indefinitamente in O, e dal punto A si lasci cadere la perpendicolare AD, dico, che il quadrato della AB avanza i due quadrati della BC, e della AC contenenti l' angolo ottuso di due rettangoli della BC nella CD contenuta tra il punto C, e il punto D della perpendicolare. O ciò che è lo stesso, dico, che AB quadrato è uguale a' due quadrati della BC, è della CA, più due rettangoli di BC in CD. Tav. IV. Fig. XV.

Dimostrazione.

Il quadrato della BA è uguale a' due quadrati della BD, e della DA (*a*). (*a*) Propos. 22. lib. 1.

Ma i due quadrati della BD, e della DA sono uguali a' quadrati della BC, della AC, più due rettangoli della BC, nella CD.

Poichè i due quadrati della BD, e della DA sono uguali al quadrato della BC, a' due rettangoli della BC nella CD, al quadrato della DC (*b*) e al quadrato della DA. Ma i due (*b*) Propos. 4.

qua-

quadrati della C D, e della D A sono uguali al solo quadrato della A C (e). Onde i due quadrati della B D, e della D A sono uguali a' due quadrati della B C, e della A C, più i due rettangoli della B C nella C D.

(e) Prop. 12. lib. 1.

Onde il quadrato della B A è uguale a' quadrati della BC, della AC più i due rettangoli della BC nella CD. Ciò ec.

PROPOSIZIONE XIII.

In qualunque triangolo il quadrato di un lato opposto ad un angolo acuto è superato da' quadrati degli altri due lati di due rettangoli compresi sotto quel lato adjacente all' angolo acuto, su cui possa cader la perpendicolare, e sotto quella porzion dello stesso lato, che è adjacente allo stesso angolo acuto.

Spiegazione.

Tav IV. Fig. XVI. Sia il lato A B di un triangolo qualunque opposto all'angolo acuto D, e dal punto A si tiri la perpendicolare A C, che cada dentro l'altro lato B D adjacente all'angolo acuto, dico, che il quadrato della A B è superato da' due quadrati della B D, e della A D di due rettangoli contenuti sotto la stessa B D come un lato, e la linea D C, che è adjacente all'angolo acuto, come l'altro. O ciò che è lo stesso, dico, che il quadrato della A B insieme con due rettangoli della BD nella CD uguaglia i due quadrati degli altri due lati A D, B D.

Di-

Dimostrazione.

Il quadrato della A B con due rettangoli della BD nella CD è uguale al quadrato di AC, al quadrato della B C a' due rettangoli della B C nella C D, e a' due quadrati della C D.

Poichè il quadrato della B A uguaglia i due quadrati della AC, e della C B (a) e i due rettangoli della BD nella DC uguagliano due rettangoli della B C nella CD con due quadrati della CD (b). (a)Propos. 12. lib. 2. (b)Propos. 3.

Ma il quadrato della A C col quadrato della BC, con due rettangoli della BC nella C D con due quadrati della CD, sono uguali a due quadrati della B D, e della AD.

Poichè il quadrato della AD uguaglia il quadrato della A C con un de' due quadrati della C D (c), e il quadrato della BD uguaglia il quadrato della BC, due rettangoli della BC nella CD, e l'altro quadrato della CD (d). (c)Propos. 12. lib. 1.

Onde il quadrato della A B con due rettangoli della BD nella C D uguaglia i due quadrati della BD, e della AD. Ciò ec. (d)Propos. 4.

PROPOSIZIONE XIV.

Formare un quadrato di una qualunque figura rettilinea.

Costruzione.

Sia una qualunque data figura rettilinea VXZ, a cui si faccia uguale il parallelogrammo OEDA (a). Prolunghisi il lato maggiore ED in B, e si faccia DB uguale al minore DA. La linea EB dividasi in C Tav.IV. Fig. XVII. (a)Propos. 25. lib. 1. Cor. 2.

per

per metà, e fatto centro in C col raggio CE descrivasi un cerchio, e prolungando il minor lato AD finchè incontri in qualche punto L la circonferenza, tirisi la linea CL, dico, la linea DL essere il lato del cercato quadrato.

Dimostrazione.

Il rettangolo di ED in DB, che è il parallelogrammo OD col quadrato CD uguaglia il quadrato EC, o pur il quadrato CL (*b*)

(*b*) Prop. 5. Quel rettangolo uguaglia il parallelogrammo OD per esser DB uguale a DA per costruzione.

Ma il quadrato della CL uguaglia i due quadrati della CD, e della DL. (*c*).

(*c*) Prop. 21. lib. 1.

Onde il rettangolo della EDB col quadrato della CD uguaglia il quadrato della DL col quadrato della stessa CD.

Onde tolto da ambedue le parti il quadrato della CD, rimane il quadrato della DL pari al rettangolo della ED in DB, cioè al parallelogrammo OD, cioè alla data figura rettilinea XZV. Ciò ec.

ELE-

ELEMENTO
TERZO.

QUesto Elemento racchiude le proprietà fondamentali, e primarie del cerchio. Niuna figura piana è più semplice, più regolare, più facile a delinearsi del cerchio, e pure niuna hà più occupati, e inviluppati gli animi de' più Eccellenti Geometri; i quali per ritrovare un piano rettilineo uguale al pian circolare (il che fatto per la proposizione ultima del secondo Elemento si potrebbe formare un quadrato uguale al pian circolare, il che chiamasi quadratura del cerchio) tanti volumi anno composto. Noi da queste più sublimi intraprese ci rimarremo per ora, e solamente del cerchio dimostreremo quelle proprietà, o passioni, che colla scorta de' due primi Elementi possono dimostrarsi, le quali per altro sono maravigliose, e da se bastevolmente degne di tutte le nostre considerazioni. Io prima proporrò le solite definizioni appartenenti particolarmente a questo Elemento. Indi alle proposizioni a molto minor numero ridotte mi condurrò.

Definizione I.

Uguali cerchj chiamansi quelli, i cui diametri, o semidiametri sono uguali.

Definizione II.

Tav. V. Fig. I. *Allora dicesi una linea toccare il cerchio, quando in esso s' incontra, e pure prodotta più oltre nol sega, come la linea AB.*

Definizione III.

Tav. V. Fig. I. *Allora due cerchj si toccano o interiormente come i due cerchj CSTP, CONM, o esteriormente come gli altri due SCPT, DTER, quando s' incontrano, ma non si segano.*

Definizione IV.

Tav. V. Fig. II. *Allora due linee DE, FG in un cerchio diconsi ugualmente dal centro distanti, quando le linee tirate dal centro C sopra di esse perpendicolarmente sono uguali, come son le due linee CA, CB.*

Definizione V.

Tav. V. Fig. III. *Segmento, o porzion segata di un cerchio è una figura racchiusa da una linea diritta, e una porzion di circonferenza. Onde le due figure ACB, ADB si chiamano segmenti del cerchio.*

Definizione VI.

Angolo del segmento chiamasi un angolo mistilineo, che fà la circonferenza con una linea diritta, come è l'angolo CAB, o vero DAB.

Defi-

Definizione VII.

L' Angolo nel ſegmento chiamaſi quello, che forman due linee, le quali da un ſegmento di cerchio ſon contenute. Così l'angolo ADB chiamaſi angolo nel ſegmento AMSB, perchè le due linee AB, DB, che lo formano in quel ſegmento ſon chiuſe.

Definizione VIII.

Un Angolo diceſi poſar sù quella porzion di circonferenza, che gli reſta oppoſta. Così diceſi l'angolo ADB poſar ſulla porzion di circonferenza ACB.

Definizione IX.

Settor di un cerchio chiamaſi una figura compreſa da due ſemidiametri, o raggi di un cerchio, e dall'arco frappoſto tra eſſi raggi. Settor dunque ſarà la figura MOS.



PROPOSIZIONE I.

Il centro di un cerchio è in una linea, la qual feghi perpendicolarmente, e in due parti uguali un' altra linea, che fia nel cerchio.

Spiegazione.

Tav. V. Fig. IV. Sia una linea FE, la qual feghi un' altra linea AB contenuta nel cerchio, e la feghi perpendicolarmente, e in due parti AD, DB uguali, dico il centro del cerchio FAEB effere in quefta linea FE.

Coftruzione.

Se il centro del cerchio non farà nella linea FE, farà fuori di effa, come in O. Dal punto O tirinfi le tre linee OA, OD, OB.

Dimoftrazione.

Se il punto O è centro del cerchio, farebbe l' angolo ODA uguale all' angolo CDA.

Poichè fe fi confiderano i due triangoli ODA, ODB fi troveranno in effi tre lati, uguali a tre lati, cioè il lato OA uguale ad OB per effere il centro in O (*a*), il lato AD per l' ipotefi uguale al lato DB, e il lato OD comune. Onde l' angolo ODA uguale all' angolo ODB (*b*) cioè l' angolo ODA retto. Ed effendo retto pur l' angolo CDA quefti due angoli fono uguali.

(*a*) *Defin.* 12.
(*b*) *Per la Propof.* 6. *del lib.* 1.

Ma l'angolo ODA è maggiore, o minore di CDA.

Poichè fe il punto O cade fuor della FE nel fegmento FBE l'angolo ODA farà maggiore per effere l'angolo CDA parte dell'angolo ODA. Ma fe il punto O cade nel fegmento FAE, farà minore per effer l' angolo ODA parte dell' angolo CDA.

Onde

Onde il punto O, e qualunque altro, che sia fuori di FE non può esser centro del cerchio. Dunque il centro sarà nella linea FE. Ciò ec.

Corollario I. di Eucl. Prop. 1.

Indi nasce lo scioglimento di questo problema. Dato un cerchio trovarne il centro. Si conduca una qualunque linea AB, che si seghi in due parti uguali per esempio in D. Da questo punto si alzi la perpendicolare EF, la qual si divida in due parti uguali in C. Dico il punto C essere il centro. Poichè il centro è nella linea EF (*c*). Dall'altra parte non può essere, che nel punto C. Poichè i due raggi CE, CF anno ad essere uguali. Onde C sarà il centro.

(*c*) *Per la Prepos.*

Corollario II. di Eucl. Prop. 3.

Se un diametro sega un altra linea contenuta nel cerchio, e la sega perpendicolarmente, la sega in due parti uguali, e se la sega in due parti uguali la sega perpendicolarmente.

Prima Parte. Poichè se la sega perpendicolarmente, i due angoli CDA, CDB per esser retti saranno uguali (*d*). La linea CA è ancora uguale alla CB (*e*) e la CD è comune. Onde ne' due triangoli CDA, CDB due lati, e un angolo non intercetto sono uguali. Onde il terzo lato AD è uguale al terzo lato DB, (*f*).

(*d*) *Assiom. 10.*
(*e*) *Definiz. 12. lib. 1.*
(*f*) *Propos. 18. lib. 1.*

Seconda Parte. Essendo il lato DA uguale al lato DB, e gli altri due lati CA, CD,

uguali, gli altri due lati CB, CD, saranno i tre lati del triangolo CDA, uguali a' tre lati del triangolo CDB. Onde l' angolo CDA è uguale all'angolo CDB. (g)

(g) Prop. 6. del 1. El.

PROPOSIZIONE II.

di Euclide 7.

Se dentro il cerchio si pigli un punto, che non sia il centro del cerchio, e per esso conducansi delle linee alla circonferenza, dico

1. La massima esser quella che passa pel centro

2. La minima esser quella che avanza alla massima

3. Delle altre, che posson tirarsi quella esser maggiore, che fa minor angolo colla massima.

4. Due sole linee uguali potersi per quel punto tirare alla circonferenza.

Spiegazione.

Tav. V. Fig. V. Dal punto A, che sia fuor del centro tirisi pel centro C la linea ACF, che si prolunghi in E, indi si conducan le linee AD, AB, AO, ec.

Dico 1. AF esser la massima, cioè qualunque altra DA esser minore.

Co-

Costruzione.

Si conduca la linea D C.

Dimostrazione della prima parte.

La linea D A è minore delle due linee A C, D C (*a*) ma le due linee A C, D C sono uguali alla linea A F, per essere A C comune, e C D uguale a C F. Onde (*b*) D A farà minor di A F. Ciò ec.

(*a*) Defin. 2. del lib. 1.

(*b*) Assiom. 1.

Dico 2. A E esser minima, cioè qualunque altra A B esser di essa maggiore.

Dimostrazione della seconda parte.

La linea B A colla linea C A sono maggiori della linea C E.

Poichè C E uguaglia C B, e i due lati B A, A C sono del terzo C B maggiori. Onde B A, A C son maggiori di C E (*c*)

(*c*) Ivi.

Onde tolta da ambe le parti C A, resterà B A maggior di E A. (*d*). Ciò ec.

(*d*) Assiom. 5.

Dico 3. D A esser maggiore di B A, ponendo l' angolo D A F minore dell' angolo F A O.

Dimostrazione della terza parte.

Poichè conducasi la B D sarà l' angolo A B D maggior dell' angolo C B D. Ma l' angolo C B D è uguale all' angolo C D B. Onde (*e*) l' angolo A B D è maggiore dell' angolo C D B; e molto più dell' angolo A D B. Onde (*f*) il lato D A opposto al maggior angolo sarà maggiore del lato B A opposto al minore. Ciò ec.

(*e*) Assiom. 1.

(*f*) Propos. 17. del 1. El.

Dico 4. due sole linee AB, AO, che facciano gli angoli BCA, OCA, uguali, essere uguali.

Dimostrazione della quarta parte.

Poichè BC uguaglia OC, CA è comune, e l'angolo intercetto BCA, è uguale
(g) Per la Propos. 3. lib. 1. all'intercetto OCA. Onde (g) la base AB, uguaglierà la base AO. E qualunque altra linea, che faccia un minor angolo colla AF,
(h) Per la 3. parte. che non fà la BA, è maggior di BA (h), qualunque altra che faccia un maggior angolo è minore. Similmente qualunque altra linea, che faccia un'angolo maggiore, o minore dell'angolo OAF, farà minore, o maggiore della OA. Onde le sole due BA, OA, sono uguali. Ciò ec.

PROPOSIZIONE III.

di Euclide 5.

Se due cerchj scambievolmente si segano, non anno un comun centro.

Spiegazione.

Tav. V. Fig. VI. Due Cerchj o siano uguali, o non siano, si seghino in B; dico essi essere eccentrici, cioè non avere un comun centro.

Costruzione.

Si conduca dal centro C del cerchio AEBG,

AEBG, la linea CB al punto B del segamento, o un altra qualunque CE.

Dimostrazione.

Se il punto C, che è centro del cerchio AEBG lo fosse pur del cerchio ADBF, i due raggi CE, CB sarebbono uguali, e uguali ancor sarebbono i due raggi DC, CB (*a*). Onde le linee DC, EC per essere uguali ad una terza CB sarebbono uguali fra di loro (*b*) il che è impossibile (*c*). Onde il punto C non è comun centro. Ciò ec.

(*a*) *Defin. 12. del 1. El.*
(*b*) *Assiom 1*
(*c*) *Assiom. 9.*

Corollario di Eucl. Prop. 10.

Due cerchj AEBG, ADBF non possono segarsi in più, che in due punti.

Dimostrazione.

Poichè se questi cerchj oltre al segarsi ne' due punti A, B, si segassero pure in un terzo punto D, sarebbono le tre linee CD, CB, CA uguali fra loro (*d*). Ma esse non possono essere uguali.

Poichè per essere uguali bisognerebbe, che il punto C fosse comun centro (*e*), e comun centro il punto C non può essere, perchè i due cerchj si segano per l' ipotesi (*f*).

Onde tali cerchj nel terzo punto D non posson segarsi.

(*d*) *Defin. 12. lib. 1.*
(*e*) *Parte 4. della Propos. 2.*
(*f*) *Per la presente Proposiz.*

PROPOSIZIONE IV.

di Euclide 8.

Se da un punto preso fuori del cerchio si tirino nel cerchio delle linee diritte

Dico 1. Delle linee che cadono nel concavo della circonferenza quella essere la massima, che passa pel centro

Dico 2. Le altre tanto esser maggiori, quanto minor angolo fan colla massima.

Dico 3. Delle linee, che caggiono nel convesso della circonferenza quella esser la minima, che prolongata passa pel centro.

Dico 4. Le altre tanto esser maggiori quanto maggior angolo fan colla minima.

Dico 5. Non più, che due uguali linee posson condursi, o al concavo, o al convesso della circonferenza.

Spiegazione.

Tav. V. Fig. VII Sia un punto A fuor del cerchio. Da questo punto tirinsi delle linee nel cerchio AD, AB, AF. Dico prima, la linea AD, che passa pel centro C, e cade nel concavo del cerchio FBDS esser massima, cioè maggiore di qualunque altra AB, che cada nello stesso concavo. Si tirino le linee CO, CB.

Di-

Dimostrazione della prima parte.

La linea A D è uguale alle due linee AC, CB

Poichè AC è comune, e il raggio CD uguale al raggio CB.

Ma le due linee AC, CB sono maggiori della linea A B (*a*), onde anche la linea A D è maggiore della linea AB (*b*). Ciò ec.

(*a*) Definiz. 2. lib. 1.
(*b*) Assiom. 1.

Dico in secondo luogo, A B, che fà l'angolo BAD minor dell' angolo FAD esser maggiore di AF.

Dimostrazione della seconda parte.

Conducansi le linee FB, FC. L'angolo CFB uguaglia l'angolo CBF (*c*). Ma l'angolo AFB è maggiore dell' angolo CFB, onde l'angolo AFB sarà maggiore dell'angolo FBC, e molto più della sua porzione FBA. Onde nel triangolo FAB il lato BA opposto al maggiore angolo è maggiore del lato FA opposto al minore (*d*). Ciò ec.

(*c*) Propos. 5. del 1 El.
(*d*) Propos. 17. del 1. El.

Dico in terzo luogo, che delle linee che cadono sul convesso GOEI la linea AE esser la minima, cioè esser minore di AO, e di qualunque altra.

Dimostrazione della terza parte.

Nel triangolo AOC i due lati AO, OC insieme sono maggiori del terzo AC. (*e*) Ma la parte CE uguaglia il lato CO. Onde l' avanzo OA sarà maggiore dell' avanzo EA. (*f*) Ciò ec.

(*e*) Definiz. 2. El. 1.
(*f*) Assiom. 6.

Dico

Dico in quarto luogo la linea A G esser maggiore della A O.

Dimostrazione della quarta parte.

Conducansi le G C, G O; e sarà l' angolo C O G uguale all' angolo C G O (g). Onde l' angolo C G O, e molto più l' angolo F G O sarà maggiore dell' angolo B O G. Onde l' angolo A G O sarà minore dell' angolo A O G. Onde la G A sarà maggiore della O A (h). Ciò ec.

(g) Prop. 5. del 1 El.

(h) Prop. 17. del 1. El.

Dico finalmente la linea A G essere uguale alla A I, se l' angolo G C A sia uguale all' angolo I C A, e non esservi una terza linea, che cadendo sul cerchio uguagli la A G, o la A I.

Dimostrazione della quinta parte.

Essendo G C uguale a C I, C A comune a' due triangoli A C G, A C I, e finalmente l' angolo intercetto G C A uguale all' intercetto I C A, sarà la base A G uguale ad A I (i). Dall' altra parte essendo qualunque altra linea, che a destra, o a sinistra cada della A G, e della A I, maggiore, o minor di essa (k) niuna altra linea potrà essere uguale alla A G, o alla A I. Ciò ec.

(i) Prop. 3. lib. 1.

(k) Per la 4. parte.

PRO-

PROPOSIZIONE V.

di Eucl. 14. e 15.

Quelle linee, che nel cerchio sono ugualmente dal centro distanti sono uguali, e quelle che son più distanti sono minori.

Spiegazione.

Siano due linee A B, D E tali, che la perpendicolare C O, che è la distanza della A B dal centro, uguagli la perpendicolare C V, che è la distanza della D E, dico A B, D E essere uguali. In oltre se la distanza C I del centro dalla P Q sia maggior di C V, dico P Q esser minore della D E. Tav. V. Fig. VIII.

Dimostrazione della prima parte.

Ne' due triangoli rettangoli C O B, C V E, oltre all'angolo retto uguale (*a*) il lato C B uguaglia il lato C E, e il lato C O uguaglia secondo l'ipotesi il lato C V. Onde il terzo lato O B uguaglia il terzo V E (*b*). Similmente A O uguaglia D V. Onde tutta la A B è uguale a tutta la D E. (*c*) Ciò ec.

(*a*) Assiom. 10.
(*b*) Propos. 12. lib. 1.
(*c*) Assiom. 2.

Dimostrazione della seconda parte.

Essendo il quadrato della C E uguale al quadrato della C Q, perchè la stessa C E è uguale alla C Q, ed essendo il quadrato della C E uguale a' due quadrati della C V, e della V E (*d*) ed il quadrato della C Q uguale a' quadrati della C I, e della I Q, saranno

(*d*) Propos. 22. El. 2.

ranno i due quadrati della CV, e della VE uguali a' due quadrati della CI, e della IQ (e). Onde sottratto da una parte il quadrato della CV minore, dall'altra il quadrato della CI maggiore, resterà il quadrato della VE maggiore del quadrato della IQ. Onde la stessa VE maggior della IQ. Ciò ec.

(e) Assiom. 1.

Corollario.

E' manifesto che il diametro sarà la massima delle linee, che nel cerchio possan tirarsi. Poichè qualunque altra AB sarà minore de' due lati AC, CB; Ma questi due lati AC, CB sono uguali al diametro HS. Onde (f) AB sarà minore del diametro HS.

(f) Ivi.

PROPOSIZIONE VI.

di Euclide 16.

Se all' estremità di un diametro tirisi una linea perpendicolare ad esso diametro, dico prima, che essa cade fuor del cerchio, il quale solo tocca in un punto; dico in oltre, qualunque altra linea tirata tra la perpendicolare ed il diametro, segare il cerchio.

Spiegazione.

Tav. V. Fig. IX. All' estremità T del diametro ET si conduca la perpendicolare AT, dico, qualunque

que punto, che non sia il punto T cadere fuori del cerchio; dico poi, qualunque altra linea TI segare il cerchio.

Dimostrazione della prima parte.

Se alcun altro punto fuor del punto T caderà nel cerchio, sarà per esempio il punto B. Ma il punto B cade fuori del cerchio.

Poichè tirandosi al centro la linea BC, sarà l' angolo CBT minore dell' angolo CTB, che è retto (a). Onde il lato BC sarà maggiore del lato CT, cioè maggior di un raggio. Onde il punto B cade fuor del cerchio.

(a) Cor. della Propos. 16. lib. 1.

Onde niun punto fuori del punto T cade nel cerchio, o nella circonferenza di esso. Ciò ec.

Dimostrazione della seconda parte.

Tirisi la linea CO, perpendicolare a TI. Essendo l' angolo retto COT maggiore dell' acuto CTO, sarà il lato CO minore del lato CT. Ma il lato CT è raggio del cerchio; onde CO sarà minore del raggio, e per ciò il punto O caderà dentro il cerchio, che dalla linea TI sarà segato. Ciò ec.

Corollario I.

Potendo qualunque porzione della TE divenir diametro di un' altro, o d' infiniti altri cerchj, che tutti passino pel punto T, ed essendo a tutti questi diametri perpendicolare la stessa AT, essa sarà comune tangente di tutti essi al punto T. Poichè sù ciascuno si può ripetere la stessa costruzione, e dimostra-

ſtrazione. Lo ſteſſo dicaſi, ſe la T E prolongata quanto ſi voglia ſi faccia divenir diametro d'infiniti altri cerchj, de' quali comun tangente ſarà la ſteſſa A T. Generalmente può dirſi, che la A T tangente di un cerchio, è tangente di tutti que' cerchj, che anno il centro nel diametro T E prolongato, quanto biſogna, e le cui circonferenze paſſino pel punto T.

Corollario II.

Se due cerchj T I E, T R S ſi tocchino nel punto T interiormente, e la linea A T ſia tangente del primo maggiore T I E, ſarà pur tangente del ſecondo minore T R S. Poichè incontrando la A T il minor cerchio nel punto T, ſe non ſia tangente, lo ſegherà in un altro punto della circonferenza T R S (*b*). E ſe eſſa ſega il cerchio interiore, prolongata verrà a ſegar pure l'eſteriore. Il che è contro l'ipoteſi, ſecondo la quale la linea A T è tangente dell'eſteriore, onde la ſteſſa A T, che è tangente del maggiore, ſarà pure tangente del minore, cioè ſarà tangente comune.

(*b*) Defini. 3.

PROPOSIZIONE VII.

di Euclide 17.

Dato un punto fuori del cerchio tirare ad esso una tangente, cioè una linea, che lo tocchi in un punto.

Costruzione.

Sia il cerchio dato ODB, e il punto fuori di esso A. Primieramente si tiri la linea AC al centro del dato cerchio. Col raggio CA descrivasi un arco di cerchio EA. Al punto D si alzi la linea DE perpendicolare ad AC. Dal punto E, in cui la perpendicolare incontra l'arco AE, si conduca al centro la linea EC, che segherà la circonferenza del minor cerchio in B. Dico, che dal punto A al punto B tirando la linea AB, essa farà la cercata tangente. Tav. V. Fig. X.

Dimostrazione.

Si considerino i due triangoli CBA, CDE, ne' quali il lato CB uguaglia il lato CD, il lato CA, il lato CE, e l'angolo intercetto BCA, DCE è comune. Onde anche l'angolo CBA uguaglierà l'angolo CDE. (*a*) Ma l'angolo CDE è retto, onde retto pur sarà l'angolo CBA. Per la qual cosa la linea AB solo toccherà il dato cerchio nel punto B (*b*). Ciò ec.

(*a*) Prop. 3. lib. 1.

(*b*) Prop. 6.

PROPOSIZIONE VIII.

di Eucl. 18.

Se una linea tocchi un cerchio, e dal centro di esso cerchio si tiri al punto del contatto una linea, dico, una tal linea esser perpendicolare alla tangente.

Spiegazione.

Tav.V. Fig.XI. Sia una linea AT, che tocchi il cerchio, dal cui centro C tirisi al punto T la linea CT, dico essa essere alla AT perpendicolare.

Dimostrazione.

Se la perpendicolare non fosse la linea CT sarebbe qualunque altra linea CB. Ma CB non può esser perpendicolare.

Poichè se lo fosse l'angolo CTB sarebbe minore dell' angolo CBT (a). Onde CT sarebbe maggiore della CB, e così il punto B caderebbe dentro il cerchio. (b)

Il che è impossibile. (c)

Onde rimane, che perpendicolar sia la CT. Ciò ec.

(a) Cor. della Proposizione 16. lib. 1.
(b) Proposizione 17. lib. 1.
(c) Proposizione 6.

Corollario I. di Eucl. Prop. 19.

Indi siegue, che se al punto del contatto tirisi una perpendicolare alla tangente, questa perpendicolare debba passar pel centro. Poichè se il centro non sarà nella linea TC perpendicolare alla AT, sarà fuori di essa, come nel punto P. Dal punto P potrà tirarsi la linea PT, la quale per la Proposizione sarebbe perpendicolare ad AT. Onde l'an-

l'angolo PTA per esser retto, sarebbe uguale all'angolo CTA pur retto per ipotesi. Il che è impossibile.

Corollario II. di Eucl. Prop. 11.

Se due cerchj TEFG, TOMN si toccheranno in un punto T, la linea che passa pe' due centri S, C passerà pel punto T. Poichè al punto T tirandosi una tangente AT del cerchio TOMN, e da' due centri C, S due linee CT, ST, amendue queste linee saran perpendicolari alla tangente AT, che è tangente comune (*a*). Onde non saran due linee, ma una, che passa pe' due centri C, S. La stessa cosa si mostra, se i cerchj non interiormente, ma di fuori si toccheranno.

(*a*) Pel Cor. 2. della Prop. 6.

PROPOSIZIONE IX.

di Euclide 20.

Nel cerchio l'angolo al centro è doppio dell'angolo alla circonferenza, se posano sullo stesso arco.

Spiegazione.

Sia un angolo al centro del cerchio ACB, il qual posi sopra l'arco AB. Sopra lo stesso arco AB posi un'angolo ADB, che abbia la sua cima nella circonferenza dello stesso cerchio. Dico l'angolo, che fassi al

Tav. V. Fig. XII.

centro esser doppio dell' angolo, che formasi alla circonferenza. Tre sono i casi di questa proposizione. Il primo caso, in cui i due lati BC, DB coincidano. Il secondo, in cui i lati non coincidano, come avviene nell' angolo A E B. Il terzo in cui un lato seghi l'altro, come avviene nell' angolo AFB, in cui il lato AF sega il lato CB. In tutti e tre questi casi è vero il proposto teorema.

Dimostrazione del I. Caso.

L' Angolo esterno A C B del triangolo A C D uguaglia i due interni e opposti C D A, C A D (*a*), i quali angoli per essere uguali (*b*) sarà uno di essi B D A la metà di que' due angoli, cioè la metà dell' angolo esterno B C A, che è al centro. Onde l' angolo B C A sarà doppio dell' angolo B D A. Ciò ec.

(*a*) Propos. 16. lib. 1.

(*b*) Propos. 5. lib. 1.

Dimostrazione del II. Caso.

Tirisi pel centro la linea E M. Pel primo caso l' angolo A C M è doppio dell' angolo A E M; Parimente l'angolo M C B è doppio dell' angolo M E B. Onde i due angoli insieme A C M, M C B, cioè tutto l' angolo A C B, sarà doppio di tutto l' angolo A E B. Ciò ec.

Dimostrazione del III. Caso.

Tirisi pure pel centro C la linea F O. Pel primo caso sarà l' angolo al centro O C B doppio dell' angolo alla circonferenza O F B. Ma allo stesso modo l' angolo O C A è doppio dell' angolo O F A. Onde sottraendo que-

sti

sti secondi angoli da' primi, resta l' angolo ACB doppio dell'angolo AFB. Ciò ec.

Corollario di Eucl. Prop. 21.

Essendo ciascun degli angoli ADB, AEB, AFB uguali alla metà di un terzo medesimo angolo ACB, saranno uguali fra di loro (*c*). Sicchè tutti gli angoli, che sono nello stesso segmento AEB del cerchio, sono uguali; Overo tutti gli angoli che posano (*d*) sullo stesso arco di un cerchio, come sarebbe l' arco AMB, sono uguali fra loro. Poichè son sempre la metà dell' angolo al centro.

(*c*) *Assiom.* 1.

(*d*) *Definiz.* 8.

PROPOSIZIONE X.

di Euclide 22.

In qualunque quadrilatero inscritto nel cerchio i due opposti angoli uguaglian due angoli retti.

Spiegazione.

Sia un qualunque quadrilatero ABCD iscritto nel cerchio, dico i due angoli opposti DCB, DAB, o vero gli altri due opposti ADC, ABC essere uguali a due retti. Poichè si tirino le due linee AC, DB. Tav. V. Fig. XIII.

Dimostrazione.

Nel triangolo DAB, l' angolo DAB in-

sieme cogli altri suoi due angoli A D B, A B D uguaglia due retti (*a*)

(*a*) Per la 2. parte della Prop. 16. lib. 1.

Ma l' angolo A D B uguaglia l' angolo A C B, e l' angolo A B D uguaglia l' angolo D C A.

Poichè i due angoli A D B, A C B posano sullo stesso arco A B, e similmente i due angoli A B D, A C D posano sullo stesso arco A D (*b*).

(*b*) Cor. della 9.

Onde l' angolo D A B cogli altri due D C A, A C B, cioè con tutto l' angolo D C B, uguaglia due angoli retti. Ciò ec.

PROPOSIZIONE XI.

di Euclide 25.

Dati tre punti, che non siano in una linea diritta, trovare il centro di un cerchio, la cui circonferenza passa per i tre dati punti.

Spiegazione.

Tav. V. Fig. XIV. Siano i tre dati punti A, B, C voglia trovarsi il centro di un cerchio, la cui circonferenza passi per essi.

Costruzione.

Dal punto A si tiri la linea A B, la qual si seghi in O in due parti uguali, ed al punto O si alzi la perpendicolare O Q. Similmente la B G dividasi in E in due parti uguali, e al punto E si alzi la perpendicolare

re

re E D. Dico il punto C, in cui le due perpendicolari si segano, essere il centro del cerchio cercato.

Dimostrazione.

Essendo la linea A B divisa in O in due parti uguali, ed essendo la linea QO ad essa perpendicolare, il centro del cerchio sarà in questa perpendicolare QO (a). Somigliantemente essendo B C divisa ugualmente in E, ed essendo E D perpendicolare, il centro dello stesso cerchio sarà nella perpendicolare D E. Onde il centro del cerchio sarà nel punto C, che è comune all'una, e all'altra perpendicolare. Ciò ec.

(a) Prop. 1.

Corollario.

Se fossero dati non già tre punti, ma un arco A B C perchè si compisse, in esso vanno presi tre punti, e fatta la costruzion come dianzi.

PROPOSIZIONE XII.

di Eucl. 26. e 27.

Se due cerchj sono uguali, dico prima, che gli angoli uguali o al centro, o alla circonferenza posano sopra archi uguali, dico in oltre, che se due angoli posano sopr' archi uguali, sono uguali.

Spiegazione.

Tav. V. Fig. XV. Siano due cerchj SAB, PMN uguali, cioè di ugual raggio, e siano i due angoli al centro ACB, MON, o vero i due angoli alla circonferenza ASB, MPN fra loro uguali, dico l' arco AB essere uguale all' arco MN.

Dimostrazione della prima parte.

Ne' due triangoli ACB, MON i due lati CA, CB uguagliano i due lati OM, ON, per esser raggi di uguali cerchj, e l' angolo intercetto ACB è ugual per ipotesi all' intercetto MON. Onde la base AB uguaglierà la base MN (*a*). Sicchè se l' una sopra l' altra si collocasse, i punti M, N poserebbono sù i punti A, B, e il punto C nel punto O (*b*). Onde tutto l' arco MN caderebbe sù tutto l' arco AB. Poichè coincidendo i punti M, N co' punti A, B, se l' arco coll' arco non confrontasse, lo segherebbe, e segandolo non potrebbe il centro O con-

(*a*) Prop. 3. del 1.

(*b*) Assiom. 8.

confrontare col centro C (*c*). Ma noi abbiam dimostrato i due centri O, C confrontare; onde confronteranno i due archi. Perchè saranno uguali (*d*). E ciò quanto agli angoli al centro. Se poi gli angoli alla circonferenza sono uguali, uguali pur saranno gli angoli al centro. Ma se gli angoli al centro sono uguali, gli archi sono uguali; onde anche, se gli angoli alla circonferenza ASB, MPN sono uguali, gli archi AB, AN saranno uguali. Ciò ec.

(*c*) *Per la Prop. 1.*

(*d*) *Assiom. 7.*

Dimostrazione della seconda parte.

In oltre, se ne' cerchj uguali, i due archi AB, MN saranno uguali, anche gli angoli ACB, MON saranno uguali. Poichè se essi non sono uguali, l' angolo O sarà minore dell' angolo C. Si faccia l' angolo BCD uguale all' angolo O. Essendo uguali questi due angoli l' arco DB (*e*) uguaglierà l' arco MN. Ma l' arco MN per l' ipotesi uguaglia l' arco AB. Onde (*f*) l' arco AB pareggerà l' arco DB, il tutto una sua parte. Il che è impossibile. Onde l' angolo ACB uguaglierà l' angolo MON. Ciò ec.

(*e*) *Per la 1. parte.*

(*f*) *Per l' Ass. 1.*

PROPOSIZIONE XIII.

di Eucl. 28. e 29.

Ne' cerchj uguali, uguali linee diritte segano archi uguali, e gli archi uguali segano linee uguali.

Spiegazione.

Tav. V. Fig. XV. Ne' due uguali cerchj SAB, PMN, se le linee AB, MN sono uguali, gli archj AB, MN saranno pure uguali, e se gli archj saranno uguali lo saranno ancor le linee.

Dimostrazione della prima parte.

Ne' due triangoli ACB, MON tutti tre i lati sono uguali a' tre lati. Poichè due sono raggi dello stesso, o ugual cerchio, e il terzo AB per l' ipotesi uguaglia il terzo MN. Onde l'angolo ACB uguaglierà l' angolo MON (*a*). Onde l'arco AB uguaglierà l'arco MN (*b*). Ciò ec.

Dimostrazione della seconda parte.

Poichè l'arco AB è uguale all'arco MN, anche l' angolo C sarà uguale all' angolo O (*c*). Onde il lato, o base AB uguaglierà la base MN (*d*). Ciò ec.

Corollario di Eucl. Prop. 30.

Tav. V. Fig. XVI. Indi nasce lo scioglimento di un facilissimo problema, che è di dividere un' arco dato in due parti uguali. Sia un arco dato AOB, che si abbia a partire in due parti uguali. Tirate la linea AB, la qual partirete

(*a*) Propos. 6. del 1.
(*b*) Propos. 12.
(*c*) Ivi.
(*d*) Propos. 3. lib. 1.

rete per metà in C (*e*). Al punto C alzate la perpendicolare CO (*f*), dico, questa perpendicolare divider l'arco dato ugualmente nel punto O. Poichè tirando le due linee OA, OB formeransi due triangoli OCA, OCB, che anno il lato CO comune, il lato AC uguale a CB, e l'angolo intercetto ACO uguale all'intercetto BCO. Onde AO sarà uguale ad OB (*g*), e l'arco AO sarà uguale all'arco BO (*h*).

(*e*) Prop. 10. del 1.
(*f*) Prop. 8. del 1.
(*g*) Prop. 3. lib. 1.
(*h*) Per la presente Propos.

PROPOSIZIONE XIV.

di Euclide 31.

Se un angolo posa sulla metà della circonferenza è retto, se posa su un arco maggiore è maggiore, se sù di un arco minore è minor di un retto.

Spiegazione.

Sia un angolo ASB, che abbia la sua cima S nella circonferenza, e che posi sopra l'arco AOB, che sia una mezza circonferenza, dico, l'angolo ASB esser retto. Poichè tirisi al centro C la linea SC, pel qual centro C passerà la linea AB.

Tav. V. Fig. XVII.

Dimostrazione della prima parte.

L'Angolo esterno SCA è doppio dell'interno CSB.

Poichè esso è uguale a' due interni, e opposti

(a) Propos. 16. del 1. posti C S B, C B S (a). Ma questi due angoli sono uguali (b). Onde uno di essi C S B è la metà di amendue, cioè la metà dell' esterno S C A.

(b) Proposiz. 5. lib. 1.

Similmente l' altro esterno S C B è doppio dell' interno C S A. Onde amendue gli angoli S C A, S C B, che sono uguali a due retti, sono il doppio di tutto l' angolo A S B, che sarà la metà di due angoli retti, cioè uguale a un retto. Ciò ec.

Sia l' arco S A O B maggiore della metà della circonferenza, e sopra di esso posi l' angolo S E B, dico, quest' angolo esser maggiore di un retto, cioè essere ottuso. Tirisi pel centro la linea B A.

Dimostrazione della seconda parte.

Nel quadrilatero E S A B i due angoli opposti S E B, S A B sono uguali a due retti (c). Ma l' angolo S A B è minor di un retto. Poichè essendo retto l' angolo A S B esso deve essere acuto (d). Onde l' angolo S E B resterà maggiore. Ciò ec.

(c) Propos. 10.

(d) Cor. della Propoz. 16. lib. 1.

Sia l' arco S E B minore, dico l' angolo S O B esser minor di un retto.

Dimostrazione della terza parte.

Nel quadrilatero S E B O saranno parimente i due angoli opposti S E B, S O B uguali (e) a due retti. Ma l' angolo S E B è maggior di un retto, poichè, essendo l' arco S E B minore della circonferenza, l' arco

(e) Propos. 10.

S O B

SOB farà maggior della stessa. Onde l'angolo SEB farà maggior di un retto (*f*). Onde l'angolo SOB farà minor di un retto. Ciò ec. (*f*) Per la 1. parte.

PROPOSIZIONE XV.

di Euclide 32.

Se una linea tocchi il cerchio, e un' altra, che sia tirata dal punto del contatto, lo seghi, dico, gli angoli della tangente colla segante essere uguali agli angoli, che posano sù gli archj segati alla stessa parte.

Spiegazione.

La linea PA tocchi nel punto T il cerchio TMES. Dal punto T parta la linea TS, che segherà il cerchio, e lascerà l'arco TOS dentro l'angolo ATS, e l'arco TMES dentro l'angolo PTS. Dico l'angolo ATS essere uguale a un angolo, che posi sull'arco TOS, e abbia la cima nell'arco TMES, come sarebbe l'angolo TES, e parimente l'angolo PTS essere uguale a un' angolo TOS, il quale posi sopra l'arco TMES, e abbia la cima nell' arco TOS. Tav. V. Fig. XVIII.

Costruzione.

Dal punto T si conduca pel centro la linea TE, la qual sarà perpendicolare alla tan-

tangente T A. Dal punto E tirisi la linea E S.

Dimostrazione della prima parte.

L' Angolo T E S è uguale a qualunque altro, che sull' arco T O S possa posare (*a*). Ma l' angolo T E S è uguale all' angolo A T S.

(*a*) Per la Prop. 12.

Poichè essendo retto l' angolo E S T (*b*), i due angoli T E S, S T E presi insieme uguagliano un angolo retto (*c*). Ma l' angolo A T E è retto. Onde i due angoli S T E, S E T uguagliano l' angolo A T E, e tolto l' angolo S T E comune, resterà l' angolo A T S uguale all'angolo S E T.

(*b*) Prop. 14.

(*c*) Cor. della 15. del 1.

Onde l' angolo A T S è uguale all' angolo, che posi sull' arco T O S segato, e chiuso tra le due linee, che forman l' angolo. Ciò ec.

Dimostrazione della seconda parte.

I due angoli A T S, S T P sono uguali a due retti. Ma ancora nel quadrilatero T O S E i due angoli T O S, T E S sono uguali a due retti (*d*). Onde i due angoli A T S, S T P sono uguali a' due angoli T E S, T O S. Onde tolti i due angoli A T S, T E S, che sono uguali (*e*) restano i due angoli S T P, T O S uguali.

(*d*) Prop. 10.

(*e*) Per la 1. parte.

Corollario.

Essendo l' angolo T E S la metà dell' angolo al centro, ed essendo l' arco T O S la misura dell' angolo al centro, sarà la metà dell' arco T O S misura dell' angolo A T S. E simil-

fimilmente la metà dell' arco TMES farà la mifura dell' angolo PTS. Sicchè la metà degli archi circolari, che reftan fegati tra la tangente, e la fegante fono la mifura degli angoli, che fà la tangente colla fegante.

PROPOSIZIONE XVI.

di Euclide 33.

Data una linea retta trovare il centro di un cerchio, che paffando per le eftremità di effa, fottotenda un arco, che faccia al centro un angolo dato.

Spiegazione.

Sia una data linea AT, e un dato angolo X debba trovarfi il centro di un cerchio, che paffando per le eftremità A, T ftenda di fotto alla data un arco AOT, che faccia al centro l'angolo dato X. Tav. V. Fig. XIX.

Coftruzione.

L'Angolo dato X dividafi per metà, e alla fua metà facciafi uguale l' angolo ATB. Al punto T conducafi TE perpendicolare a BT. E finalmente al punto A facciafi l' angolo TAC uguale all' angolo ATC. Dico il punto C effer centro di un cerchio, che defcritto col raggio CT fottotende l'arco AOT, che fà l'angolo ACT uguale al dato X.

Di.

Dimostrazione.

Essendo BT tangente, e TA segante, sarà la metà dell' arco AOT misura dell' angolo ATB. Onde tutto l' arco AOT sarà misura del doppio dell' angolo ATB, cioè dell' angolo dato X. Ma l' arco stesso AOT è misura dell' angolo ACT. Onde l' angolo ACT, uguaglia il dato X. Ciò ec.

Avvertimento.

A ben riguardare questo problema è lo stesso che quel di Euclide. Io hò giudicato di applicarlo non al segmento, ma all' arco, non all' angolo alla circonferenza, ma al centro, perchè stimo così esser più chiaro, e più usuale.

PROPOSIZIONE XVII.

di Eucl. Prop. 35.

Se in un cerchio due linee diritte si seghino; dico, che il rettangolo compreso sotto i segmenti dell' una è uguale al rettangolo compreso sotto i segmenti dell' altra.

Spiegazione.

Tav. V. Fig. XX Se due linee seghansi nel centro, cioè se son due diametri, la proposizione è manifesta. Ma se una passa pel centro, e l' altra no, può addivenire, che la seghi in due parti uguali, e perciò perpendicolarmente, e che la

la feghi in due parti inuguali, e per ciò non perpendicolarmente. Seghi adunque primieramente una linea, o diametro OD un altra linea AB perpendicolarmente. Dico, il rettangolo della OE nella ED effere uguale al rettangolo della BE nella EA, o ciò, che è lo fteffo al quadrato della EB. Poichè fi tiri la linea CB.

Dimoftrazione del Cafo I.

Il quadrato della CB è uguale a' due quadrati della BE, e della CE (a). Ma lo fteffo quadrato della CB è uguale al rettangolo della OE nella ED infieme col quadrato della CE. (a) Prop. pof. 12. lib. 1.

Poichè il quadrato della CB uguaglia il quadrato della CD, ma il quadrato della CD uguaglia il rettangolo della OE nella ED più il quadrato della CE, per effere la linea OD divifa ugualmente in C e diffugualmente in E (b). (b) Prop. pof. 5. del 2.

Onde (c) i due quadrati della CE, e della EB uguagliano il rettangolo di OE in ED infieme col quadrato della CE. Onde tolto da ambe le parti il quadrato della CE (d) refta il quadrato della EB uguale al rettangolo della OE nella ED. Ciò ec. (c) Affiom. 1. (d) Affiom. 3.

Seghi fecondariamente il diametro OD una linea AB inugualmente in E, dico il rettangolo di OE in ED effere uguale al rettangolo di BE in EA. Si conduca dal centro C la perpendicolare CP, e fi tiri la linea CA. Tav. V. Fig. XXI.

Dimostrazione del II. Caso.

Il quadrato C A è uguale a' due quadrati (e) Prop. 22. lib. 1. A P, C P (e), e lo stesso quadrato C A è uguale al quadrato della C E insieme col rettangolo della O E nella E D.

* Poichè il quadrato della C A è uguale al quadrato della C D, ma il quadrato della C D è uguale al quadrato della C E col (f) Prop. 5. del 2. rettangolo della O E nella E D (f). Onde il quadrato della C A sarà uguale al quadrato della C E insieme col rettangolo della O E nella E D.

Onde il quadrato della C P col quadrato della P A sono uguali al quadrato della C E insieme col rettangolo della O E nella E D.

Ma il quadrato della P A è uguale al quadrato della E P col rettangolo della B E nel- (g) Ivi. la A E (g). Onde il quadrato della C P col quadrato della E P, cioè il quadrato dell' ipotenusa C E col rettangolo della B E nella E A è uguale al quadrato della C E insieme col rettangolo della O E nella E D. E tolto C E quadrato da ambe le parti avanzerà il rettangolo della B E nella E A uguale al rettangolo della O E nella E D. Ciò ec.

Finalmente può addivenire, che niuna delle due sia diametro, e che amendue comunque si seghino, come fanno le due linee B A, M N, dico pure, il rettangolo della B E nella E A essere uguale al rettangolo della M E nella E N. Poichè dal punto E si tiri il diametro D O.

Dimostrazione del III. Caso.

Il rettangolo della OE nella ED è uguale al rettangolo della BE nella EA (*h*). Ma ancora lo stesso rettangolo della OE nella ED è uguale al rettangolo della ME nella EN. Onde (*i*) il rettangolo della ME nella EN è uguale al rettangolo della BE nella EA. Ciò ec.

(h) Pel 2. Caso.

(i) Per l'Ass. 1.

Onde in qualunque modo si seghino nel cerchio due linee i rettangoli delle parti segate fra di loro sono uguali.

PROPOSIZIONE XVIII.

di Euclide 36.

Se fuori del cerchio si prenda un punto, dà cui si tirin due linee una tangente, e l'altra segante il cerchio, dico, il rettangolo di tutta la segante colla parte, che riman fuori del cerchio essere uguale al quadrato della tangente.

Spiegazione.

Da un punto A si conduca la linea AT, che tocchi il cerchio, e un' altra AS, che lo seghi, questa segante può passare pel centro C, come la AS, e può non passarvi, come la linea AE; dico nell'uno, e nell'altro caso il rettangolo della AS nella AB, o

Tav. V. Fig. XXII.

pure il rettangolo della AE nella AD essere uguale al quadrato della AT. Poichè tirisi la CT.

Dimostrazione del I. Caso.

(a) Pro-pos. 8. Essendo la CT perpendicolare alla AT (a), sarà il quadrato della CA uguale a' quadrati della CT, e della TA (b).

(b) Pro-pos. 22. del 1. Ma il quadrato della CA è uguale al quadrato della CB più il rettangolo della BA nella AS.

Poichè la linea BS è divisa in due parti uguali in C, e a lei si aggiugne la linea BA. Onde il rettangolo della BA nella AS col quadrato della BC uguaglia il quadrato della AC (c).

(c) Pro-pos. 6. del 2. Onde i due quadrati della CT, e della TA sono uguali al quadrato della CB insieme col rettangolo della AB nella AS. E sottratti i due quadrati uguali della CT, e

(d) Assiom. 3. della CB resta (d) il quadrato della AT uguale al rettangolo della AB nella AS. Ciò ec.

Dimostrazione del II. Caso.

Non passi pel centro, e si tiri CO perpendicolare ad AE, e si congiungano i punti O, D.

Il quadrato della CA è uguale a' due qua-

(e) Pro-pos. 22. del 1. drati della AO, e della CO (e). Ma il quadrato della CA è uguale al rettangolo della BA nella AS insieme col quadrato del-

(f) Pro-pos. 6. del 2. la BC (f). E il quadrato della AO è uguale al rettangolo della DA nella AE insiem col quadrato della OD.

Poi-

Poichè anche DE è divisa in due parti uguali (g), e le si aggiunge la linea DA (h). (g) Cor. 1 della 1.

Onde il rettangolo della B A nella A S insieme col quadrato della B C uguaglia il rettangolo della DA nella A E insieme col quadrato della OD, insieme col quadrato della CO. Ma il quadrato della OD, e della CO sono uguali al quadrato della CD, che è uguale al quadrato della C B. Onde (i) resta il rettangolo della B A nella A S uguale al rettangolo della DA nella A E. Ed essendosi dimostrato il rettangolo della B A, nella A S uguale al quadrato di AT, allo stesso quadrato sarà uguale il rettangolo della DA nella A E. Ciò ec. (h) Prop. 6. del 2. (i) Assiom. 1.

Corollario I.

Dimostrandosi di ciascuna segante lo stesso teorema, cioè, che il rettangolo di essa nella parte che resta fuor del cerchio sia uguale al quadrato della tangente, ne segue che tutti i rettangoli, che posson formarsi delle seganti, e delle parti, che restan fuori del cerchio, sono uguali fra di loro (k). Così il rettangolo di B A in A S uguaglia il rettangolo della DA nella A E. (k) Assiom. 1.

Corollario II. di Eucl. Prop. 37.

Se il quadrato della A T uguaglia il rettangolo della B A nella A S, la linea A T è tangente del cerchio. Poichè aggiugnendo da una parte il quadrato della C T, dall' al-

tra il quadrato della CB, i quali quadrati sono uguali, saranno i due quadrati della TA, e della TC uguali al rettangolo della BA nella AS col quadrato della CB. Ma questo rettangolo con questo quadrato uguagliano il quadrato della CA (l). Onde i due quadrati della TA, e della TC uguaglieranno il quadrato della CA. Onde l'angolo CTA è retto (m). Onde la linea TA è tangente (n).

(l) Propos. 6. del 2.
(m) Cor. della 22. del 1.
(n) Propos. 6.



USI DELLE PROPOSIZIONI
DEL
TERZO ELEMENTO.

Uso della Proposiz. I.

Intorno alla livellazione de' luoghi terrestri.

QUesta Proposizione somministra un bel teorema per uso de' livellatori, cioè, se successivamente si facciano più livellazioni in modo, che lo strumento da livellare sia collocato in mezzo a' segni, o a' punti terrestri, si va descrivendo intorno alla terra un poligono concentrico alla terra, e di lati uguali. Siano diversi segni, o punti terrestri O, D, E, S talmente livellati, che la livellazione sia fatta ne' punti B, A, Q, de' quali il punto B sia ugualmente distante da' segni O, D, il punto A da' segni D, E, il punto Q da' segni E, S. Dico i tre lati, o livellazioni, o linee orizzontali apparenti formare un poligono alla terra concentrico, ed essere uguali. Poichè essendo B O uguale a B D, l'angolo C B O o vero C B D retti, per esser la linea D O perpendicolare alla linea B C, che è la direzione del piom- Tav. VI. Fig. I.

 bino,

bino, per la proposizione la linea B C passerà pel centro dell' arco O D. Per la stessa ragione la linea A C passerà pel centro dell'arco D E, e la linea Q C pel centro dell' arco E S; Ma queste stesse linee passano pel centro terrestre. Onde il centro dell' arco terrestre B A Q è lo stesso, che il centro dell' arco, che passa pe' segni del livellamento, cioè l' arco O D E S. Onde le linee O D, D E, E S son lati di un poligono, che ha lo stesso centro della terra. E ciò quanto alla prima parte. Quanto alla seconda si osservino i due triangoli rettangoli CBD, CAD, ne' quali oltre all' angolo retto, che è uguale, abbiamo il lato D C comune, e il lato B C uguale al lato A C (a). Onde (b) il terzo lato B D uguaglia il terzo lato A D. Onde D O doppio di B D uguaglia D E doppia di A D. Allo stesso modo si mostra E S essere uguale ad E D. Da queste due parti siegue la terza, cioè, che i punti O, D, E, S sono sotto il medesimo livello, cioè ugualmente lontani dal centro terrestre, e per ciò ancor dalla superficie dell' acqua. Poichè O C, D C, ec. sono raggi dello stesso cerchio, e le linee D N, E G sono gli avanzi di due quantità uguali sottrattene due altre quantità uguali. Poichè D C uguaglia C E, e C N uguaglia C G.

(a) Def. 12.
(b) Per la 12. del 1.

Usi

Uso della II. Propos.

Sopra il moto regolar de' Pianeti colle apparenze irregolari.

Coll' ajuto di questa proposizione gli antichi astronomi fino al tempo di Keplero accordavano tutta la regolarità del movimento di alcuni pianeti colle irregolarità, che dà centri delle loro rivoluzioni si scorgono. Le irregolarità de' pianeti per quanto riguarda al moto nelle orbite loro si riducono a due, la prima è il continovo cangiamento degli apparenti loro diametri. Apparente diametro di un pianeta altro non è, che l'angolo, che formano all'occhio nostro due linee tirate da due opposti punti dell' orlo di un pianeta all' occhio nostro. Sia per esempio in T la nostra terra, in P il sole, che suppongo essere un pianeta. Se dalle due estremità *a*, *b* dell' orlo solare si tiran due linee all' occhio nostro, queste due linee formano un angolo *a* T *b*, il qual angolo chiamasi apparente diametro del sole. Lo stesso dicasi se P sia non già il sole, ma la luna. Or questo apparente diametro non è mai della stessa misura, ma circa il solstizio d'inverno (parlando del diametro solare) è il massimo, da questo solstizio fino al solstizio d' estate và sempre scemando, sicchè circa l' estivo solstizio è il minimo, dal qual solstizio fino all' alto va di bel nuovo crescendo. Una tale irregolarità, Tav. VI. Fig. II.

tà, e cangiamento gli astronomi la spiegavan così. Sia il cerchio PMAN l' orbita solare, nella quale il sole regolarissimamente si muova. Sia la terra fuori del centro C di questo cerchio, come sarebbe in T, e sia distante dal centro la distanza CT, la quale si chiama = eccentricità =. Sia finalmente il diametro PA, che passa per la terra T, e pel centro C posto per modo, che in P sia il sole circa il solstizio d' inverno; cioè circa i 20 di Dicembre, in A circa il solstizio d'estate, cioè circa i 20 di Giugno. Le quali cose poste dee succedere, che essendo il sole in A abbia dalla terra T la massima distanza. Poichè la linea TA passa pel centro C. Essendo in P abbia la minima distanza, essendo TP l'avanzo di TA, ed essendo negli altri punti della stessa orbita abbia sempre delle distanze minori della massima AT, e maggiori della minima TP in modo, che le distanze, che ha il sole dal punto T mentre dal punto A andando verso N. si accosta al punto P vadano sempre scemando, e per contrario, oltrepassato il punto P scorrendo il sole per l' arco PMA, le distanze vadano di bel nuovo crescendo. Dall'accrescimento, e scemamento di tali distanze nasce lo scemamento, ed accrescimento dell'apparente diametro. Poichè il diametro vero solare *de*, *ab* è costantemente lo stesso, ed è base de' triangoli isosceli *d*T*e*, *a*T*b*, ne' quali per essere i due lati T*d*,

T*e*

T*e* i maſſimi lati, l'angolo *d*T*e* ſarà il minimo angolo, e per eſſere i lati T*a*, T*b* i minimi l' angolo *a*T*b* ſarà il maſſimo. Ma gli altri angoli *g*T*f*, *h*T*i* tanto anderanno o creſcendo, o ſcemando, quanto le diſtanze anderanno o ſcemando, o creſcendo. Ma tali angoli ſono gli apparenti diametri, onde per l' eccentricità C T reſta facilmente ſpiegato il continovo cangiamento de' diametri apparenti del ſole, de' quali il maſſimo ſarà in P, cioè nella minima diſtanza, o come ſi dice = nel ſolar perigeo =, il minimo ſarà in A, che è il ſolare apogeo. I medj ſtanno di mezzo a queſti due punti. La ſeconda irregolarità de' pianeti conſiſte nel ritardare, o affrettare, che eſſi fanno il loro viaggio. Il che pure ſi accorda con un moto regolariſſimo, ma fatto in un orbita eccentrica, come dianzi. Poichè, quantunque eſſi in uguali tempi ſcorrano archi uguali, pure trovandoſi eſſi nello ſcorrere, che fanno queſti archi ora più, ora meno lontani da noi, allora più lenti appariranno, quando ſono più lontani, allora lentiſſimi, quando ſon lontaniſſimi, allora preſtiſſimi quando ſon viciniſſimi. Allora più, o meno lenti, o più, o meno preſti, quando più, o meno ſi troveranno lontani, più, o meno vicini. Indi è, che verſo l'eſtivo ſolſtizio, perchè il ſole è nella maſſima lontananza, anderà lentiſſimo, velociſſimo nell' invernale, perchè ſtà nella minima lontananza. E ciò quanto al

ritar-

ritardamento, o acceleramento proveniente dal suo moto nella orbita. Così gli antichi fino al Keplero combinavano una somma irregolarità con una somma regolarità di moti. Ma avendo il Keplero osservato, che l'orbita circolare eccentrica quanto si voglia non soddisfaceva a moti di Marte, sostituì l'orbita Ellittica, la quale oltre al soddisfar pienamente alle apparenze di Marte, soddisfà ancora più esattamente alle irregolarità, e solari, e lunari, e degli altri pianeti. Non è maraviglia, che anche il cerchio sufficientemente soddisfaccia a' moti solari. Poichè l' eccentricità dell'orbita solare è così piccola, che l' Ellisse d' assai si avvicina al cerchio. Se il raggio C P si pone di centomila parti, l'eccentricità C P secondo Copernico, che l' osservò l' anno 1515 è di parti 3230. Secondo la correzion fatta a Copernico dal Longomontano di 3592 parti. Secondo il Keplero di 3600 parti, osservata l'anno 1588. Secondo il Riccioli di 3460 osservata l' anno 1646. Ma i più moderni Astronomi la scemano anche di più. Poichè Domenico Cassini la vuol di parti 3400, e finalmente il VVifton più esattamente la determina di parti 3372. (a).

(a) In Praelect. astron. Lect. 8. Prob. 3. pa. 90.

Uso

Uso della Prop. IV.

Sopra la cagione del flusso, e riflusso del Mare.

Uno de' più ammirabili Fenomeni della natura è quella vicenda di abbassamento, ed inalzamento, che il mar patisce in certe ore del giorno. Questa tal vicenda chiamasi flusso, e riflusso del mare, o vero *aestus marinus*, e sulla spiegazione di essa si sono affaticati i Fisici d'ogni età. Pare, che i Neutoniani sieno stati più felici degli altri nel rintracciamento della natural cagione di questo effetto, la quale secondo essi è la generale attrazione. Per procedere ordinatamente io prima esporrò i principali Fenomeni di questo effetto marittimo, poi riporterò le due leggi fondamentali di questa attrazione, e finalmente dichiarerò per qual modo sulla presente proposizion geometrica sostengasi la spiegazione Neutoniana di così stupendi Fenomeni.

Adunque sia ABPN il nostro globo terrestre co' suoi mari, isole, e continenti. Oltre a quella vicenda incostante, che le acque marittime sofferiscono da' venti, e dalle burrasche, noi osserviamo. Tav.VI. Fig.IV.

1 Che in un giorno due volte il mare AOB, NRP, il quale dianzi era basso, comincia a gonfiare sensibilmente, finchè giunga al massimo gonfiamento sopra il suo primiero

miero livello riducendo le acque a una figura ASB, NEP, la quale per la più sublime Geometria si determina.

2 Questo gonfiamento stà nel suo colmo, quando la Luna è altissima, come in L, dopo di che risiede l'acqua fino a ridursi al primiero livello. Quando la stessa Luna già tramontata si trova altissima presso gli Antipodi, come in Q, accade un simile gonfiamento in S.

3 Paragonando il massimo gonfiamento di un giorno co' gonfiamenti degli altri dì, ritrovasi, che dentro un mese nel dì del Plenilunio, e del Novilunio accade il gonfiamento maggiore. Questi sono alcuni principali Fenomeni di tal flusso, e riflusso, ed io lascio consigliatamente gli altri, perchè sono indipendenti dalla proposizione Elementare, dalla quale intendo di ricavare la spiegazione di tali fatti.

Una tale spiegazione appoggiava il Signor Galileo al moto della nostra terra intorno al suo asse, ed i Cartesiani a' loro vortici. Ma presto fù dimostrata l' insufficienza di tali principj per render buona ragione delle circostanze osservate. Venne il Signor Nevvton, il quale da' periodi de' pianeti, e dalle irregolarità loro, massimamente della Luna, conchiuse, che diasi in natura una universal gravità, per la quale ciascuna particella di un corpo attraesse ciascuna particella di un altro; onde che l' attrazione di un corpo ris-

petto

petto all' altro crescesse col crescer delle particelle, o della materia degli stessi corpi. Questa è la prima legge fondamentale dell'universal gravità. La seconda egli la ricavò dalla medesima Astronomia, cioè, che un medesimo corpo posto a diverse distanze dall'altro, lo attraesse, e ne fosse attratto tanto più, quanto più la distanza diminuiva, e ciò con una determinata proporzione, di cui qui non è luogo di ragionare. Con queste due leggi di maggiore attrazione a minori distanze, e di maggiore attrazione a masse di corpi maggiori, il flusso, e riflusso marino si spiega così. Le acque de' mari, le quali compongono la parte più regolare della superficie terrestre A O B P N per la prima legge dell' attrazione saranno da tutto il vasto corpo terrestre attratte verso uno spazio vicino al centro terrestre C con una determinata forza, che noi gravità de' corpi appelliamo. Or questa attrazione, o gravità sarebbe costante, e della stessa misura, se intorno alla terra niun celeste corpo si ravvolgesse. Ma rivolgendosi in una gran vicinanza la nostra Luna, la quale quasi 30 terrestri diametri è da noi lontana, essa dee cagionare qualche accrescimento, o menomamento di gravità nelle acque marine. Sia per tanto la Luna in L. E' manifesto per la proposizione, che delle linee, le quali dal punto L posson condursi nella convessità della terra (la quale in questo luogo possiam tener co-

me sferica) minima sarà la LO, e le altre LA, LB, ec. saranno sempre più grandi, quanto più dal punto O si allontanano. Onde nasce per la seconda legge dell' attrazione, che la Luna pervenuta in L con maggior forza attrarrà le acque vicine al punto O, che non faccia delle più lontane. Ma questa maggior attrazione, che altro è, che maggior diminuzione di gravità? Poichè attraendo la terra le acque verso il punto C, e attraendole la Luna verso L con direzion contraria, quelle perderanno più di gravità, che più verso L saranno attratte, cioè le acque vicine ad O per la lunare attrazione diventeranno meno gravi rispetto alle più lontane. Ora da questa maggior diminuzione di gravità delle acque vicine ad O dee nascere secondo le leggi dell' equilibrio, che esse più ascendano sopra il loro livello. Così se in più tubi, che fra di loro comunichino, s' infondano più liquori di diversa specifica gravità, quale in un braccio, e quale in un altro di detti tubi, quel liquor più alto salirà, il quale avrà meno di specifica gravità. Se dunque voi considererete la figura solida AMBS come un ammassamento di cannelli pieni d' acqua marina, quale meno, e qual più grave, ne seguirà che dove men gravi sono le acque, come in O, maggior sarà la salita, e dove saranno più gravi, come in A, B, ec. sarà minore. Per tutti questi livelli, o salite di tubi passerà la superficie

ASB,

A S B, la quale farà rigonfiata in S più, che in qualunque altro luogo. Or questo rigonfiamento è appunto il flusso delle acque, che noi veggiamo, quando la Luna è in L altissima.

Ora facciamo, che stando la Luna in L trovisi il Sole in H, il che ne' Novilunj, o congiunzioni addiviene, egli è manifesto che un secondo simile effetto, ma minore del primo per la maggiore solar distanza, dee produrre l'azione solare sulle acque marine. Onde la diminuzion di gravità nelle acque vicine ad O sarà maggiore per l'accopiamento de' due effetti. Onde la salita O S sarà maggiore ne' Novilunj, che ne' dì ad essi vicini, come appunto si osserva.

Una somigliante vicenda deve in tanto patire il mar degli Antipodi N D P R. Poichè in tanto i punti della terrestre concavità saranno essi tanto più lontani dalla Luna L, quanto sono più vicini al punto R per la proposizione. Onde le particelle delle acque saranno tirate verso L tanto più, quanto più si scostano dal punto R. Ora la gravità verso il punto L è in parte cospirante colla gravità verso il centro C. Questa cospirazione di forze si fà per tal modo, che i punti vicini ad R abbiano minor gravità, che i punti più lontani. Donde per le ragioni dianzi addotte, nasce un gonfiamento N E P nel mar degli Antipodi. Dunque quando la Luna sarà presso gli Antipodi in Q, nascerà

M ne'

ne' nostri mari il gonfiamento ASB, come nasce il gonfiamento agli Antipodi quando la Luna è in L, il che è conforme a' fenomeni recati. Finalmente, quando ritrovandosi la Luna in L, il Sole troverassi in opposizione in I (il che ne' Plenilunj addiviene) il nostro mare patirà due gonfiamenti; il primo maggiore proveniente dalla Luna in L, il secondo minore proveniente dal Sole in I. L'unione di questi due gonfiamenti fa un gonfiamento maggiore ne' Plenilunj, che non sia nelle giornate, che corrono di mezzo tra' Novilunj, e Plenilunj. Ciascun potrà vedere dalle cose dette fin quì, che quelle stesse, le quali sono conseguenze delle leggi Neutoniane, sono pur fatti osservati nella natura. Onde pare per questa parte, che le leggi Neutoniane unite alle proprietà del cerchio, che noi spieghiamo sieno sufficienti a dar buon conto di una serie di fenomeni sì comuni alla geografia, e sì malagevoli alla buona Fisica.

Uso della Prop. VI.

Intorno al derivare le acque da un luogo ad un altro.

Dalla presente proposizione nasce la dimostrazione di un teorema delle livellazioni, e derivazioni delle acque, cioè, se la linea Orizzontale apparente di un punto terrestre passa per la sorgente dell'acqua, può l'acqua da

da tal sorgente scorrere, o derivarsi in quel punto terrestre; e ciò tanto più; quanto maggiore è la distanza del punto terrestre dalla sorgente. Sia il punto T un luogo terrestre, a cui si tiri la linea Orizzontale apparente TD, la quale vada ad incontrare la sorgente dell' acqua, che sia in A, dico poter l'acqua dal punto A derivarsi, e scorrere verso il punto T; ma dal punto T non potrebbe scorrere in A. Dico inoltre, che se la stessa linea Orizzontale TD si avvenisse nel punto D, che fosse dal luogo T più lontano, che non è il punto A, molto più, e con più velocità l' acqua da D scorrerebbe in T. Poichè secondo le leggi dell' Idrostatica da quel punto scorre l' acqua in un altro, il quale è dal centro terrestre più lontano, che l' altro non sia. Or essendo l' arco terrestre T B E una porzion di circonferenza, il cui centro è in C, ed essendo la linea TD perpendicolare alla TC per la proposizione il punto A caderà fuor del cerchio, e la linea A C sarà maggiore di TC; onde dal punto A l' acqua in T potrà derivarsi. Ed essendo il punto D più lontano da T, sarà la linea DC maggior di A C, e la linea ED più alta, che BA. Onde tanto più l' acqua dal punto D passerà al punto T. Nè solo dal punto A, e dal punto D, ma ancora da qualunque punto R, o vero P, che resti sopra i punti B, E, potrà l' acqua derivarsi. Dal che procede un altro teorema,

Tav. VI. Fig. III.

cioè, che possono le sorgenti restar sotto la linea Orizzontale apparente TD, del luogo T, e pure essere a tal altezza da poter derivare l' acqua fino al punto T. Il che avverrà ogni volta, che il punto R cada sopra B, e non già sotto. A conoscer poi, quando il punto R cade sopra, o sotto il punto B, benchè si adoperi il calcolo trigonometrico, io mi varrò del seguente Problema.

Problema.

Data la linea TA, e la distanza del punto A dal punto R, determinare, se il punto R sia sopra, o sotto il livello del punto T.

Soluzione.

1 Si faccia il quadrato della TA.

2 Si faccia il quadrato della AR, a cui si aggiungano due rettangoli della stessa AR nel terrestre semidiametro BC.

Se il quadrato della TA sarà uguale alla somma de' due rettangoli della RA nel terrestre semidiametro, e del quadrato di AR, dico, che il punto R caderà nel punto B, se quel quadrato sarà maggior di quella somma, il punto R caderà sopra B, se sarà minore caderà sotto B. Poichè essendo retto l' angolo T, i due quadrati della TA, e della TC saranno uguali al quadrato della CA (a), cioè al quadrato della CB, al quadra-

(a) Prop. 25. del 1.

drato della BA, a due rettangoli della AB nella BC (b). E tolto il quadrato della CB da una parte, e della CT dall' altra, resterà il quadrato della TA uguale al quadrato, della BA con due rettangoli di BA in BC. Ma il quadrato di RA insieme con due rettangoli della RA nella BC uguagliano il quadrato della AT. (c) Onde il quadrato della BA con due rettangoli della AB nella BC uguagliano il quadrato di AR con due rettangoli della RA nella stessa BC. Onde RA uguaglia BA. Ma se il quadrato di AT fosse maggiore de' due rettangoli della AR nella BC col quadrato di AR, anche i due rettangoli della AB nella BC col quadrato della BA sarebbon maggiori de' due rettangoli della AR nella BC col quadrato della AR. Ed essendo BC la stessa da amendue le parti, bisognerà, che AR sia minore di AB. E al contrario bisognerà, che AR sia maggiore di AB, se il quadrato di AT sia minore.

(b) Prop. 4. del 2.

(c) Per la Prop. 4. del 2.

Esempio.

Sia AT di 2 miglia tedesche, che formano circa 8 miglia italiane. Ciascun miglio tedesco si faccia col VVolfio 22824 piè parigini, e il terrestre semidiametro di 19615782 piedi. Sia AR di 500 piè parigini. Sarà AT di piedi 45648, il cui quadrato è di piedi 2083739904. I due rettangoli saranno di 1961564000. Aggiugnendovi il quadra-

 to di

to di 500, cioè 250000, sarà la somma di 1961814000. La qual somma essendo minor del quadrato di A T, il punto R caderà sopra B. Onde da R l' acqua scorrerà in T.

Uso della Prop. VIII.

Problema appartenente all' optica, e geografia.

Data la distanza dell' occhio dalla superficie del mare, e il terrestre semidiametro determinare la distanza della vista, cioè la distanza, a cui l' occhio possa vedere un oggetto nella stessa superficie del mare.
Tav. VI. Fig. V. Sia P O la distanza dell' occhio O dalla marittima superficie di 5 piè parigini, e sia dato il terrestre semidiametro di 860 miglia tedesche, cioè di 3440 miglia italiane, cioè di piè parigini 19615782. Si dee trovare la linea O T.

Soluzione.

Si facciano due rettangoli dell' altezza dell' occhio di 5 piedi nel terrestre semidiametro, a' quali si aggiunga il quadrato della stessa altezza di 5 piedi, la somma sarà uguale al quadrato della linea O T, e la radice di questa somma alla stessa linea O T. Poichè, essendo T O, tangente, l' angolo T sarà retto. Onde C O quadrato uguale a' due quadrati di C T, e di T O (*a*). Ma C O quadra-

(*a*) Prop. 25. del 1.

drato è uguale al quadrato di C P, e, al quadrato di P O con due rettangoli di P O in P C; onde a questi due quadrati, e rettangoli saranno uguali i due quadrati di T C, e di T O, e tolto il quadrato di T C da una parte, e dall'altra il quadrato di P C, resterà il quadrato di O T uguale al quadrato di O P con due rettangoli di O P in P C.

Essendo O P di 5 piedi saranno i due rettangoli di 196157820

Aggiugnendovi 25 piedi 25

Sarà la somma di 196157845, la cui radice sarà di 14005 piedi parigini, che son quasi miglia italiane due, e mezzo di quelle, che chiamansi geografiche. Il miglio geografico altro non è, che una estensione, la quale abbracci un minuto del grado terrestre. Onde 60 di tali miglia saranno un grado terrestre puntualmente. Il miglio tedescho geografico è di 4 minuti terrestri, cioè di 4 miglia geografiche italiane. Onde un tal miglio, che spesso viene adoperato, sarà di 22824 piè parigini; Essendo la trovata misura di 14005 piedi, essa di soli 263 piedi differirà da due miglia, e mezzo italiane geografiche. Poichè due miglia, e mezzo fanno piedi 14268.

Uso della Prop. IX.

Problema optico.

Tav.VI. Fig.VI. Sia in C l'occhio ugualmente distante delle due estremità A, B di un oggetto, e debba trovarsi un punto, il qual sia in una data linea, dal quale l'oggetto apparisca la metà, che in C non compariva sia la data linea R M. Dal centro C descrivasi un cerchio col raggio C A, o vero C B, la cui circonferenza tocca, o sega la data linea R M, e allora dico, che ne' due punti O, N, in cui la sega, l' oggetto si vedrà sotto l'angolo A O B, B N A, che sarà per la proposizione la metà dell' angolo A C B, o solo la tocca, e il punto del contatto soddisfarà al problema, o per niun modo l' incontra, e allora il problema sarà impossibile. Essendo due soli O, N que' punti, in cui la linea retta s'incontra nella circonferenza, resta manifesto questo teorema optico. In una linea retta presa fuor dell'oggetto non più che due sono que' punti, da' quali l' oggetto sotto lo stesso angolo può vedersi.

Uſo del Corollario della Prop. IX.

Teorema optico.

Un oggetto può quanto ſi voglia avvicinarſi all'occhio, e avvicinarſi per modo, che ſempre compariſca della ſteſſa grandezza. Allora un oggetto all' occhio noſtro appariſce della ſteſſa grandezza, quando i due raggj viſuali, che dall' eſtremità di eſſo oggetto ſi partono, formano nell' occhio noſtro un angolo della ſteſſa miſura. Or ſia un oggetto AB, ſia l'occhio poſto in O, donde lo miri, l' angolo viſuale AOB è la miſura dell' apparente grandezza di eſſo oggetto. Se adunque ſi concepiſca un cerchio, che paſſi per i tre punti A, B, O, e l'occhio, che ſtava in O, vada per la circonferenza, accoſtandoſi all' oggetto, e ſia ora in P, ora anche più vicino in S, dico, che in P, e in S l' oggetto AB apparirà della ſteſſa grandezza, di cui miravaſi in O. Poichè ſecondo il corollario i tre angoli BOA, BPA, BSA, e quanti altri poſſon formarſi, che ſono infiniti, ſono fra loro uguali; ma allora le grandezze appariranno uguali, quando tali angoli viſuali ſono uguali, onde in P, ed in S, dove l'occhio ſi avvicina all'oggetto AB lo vedrà della ſteſſa grandezza. Eſſendo infiniti i punti, che ſon nell' arco BOSA, infiniti ſaranno que' punti, da' quali l' oggetto ſteſſo ſotto il medeſimo angolo potrà vederſi. Tav. VI. Fig. VI.

Uſo

Uso della Prop. XI.

Problema optico.

Dato l'angolo, sotto cui l' occhio alla data distanza mira un oggetto, trovare un punto, da cui l' occhio medesimo possa mirarlo sotto un angolo doppio del primo.

Tav. VI. Fig. VI. Sia l'occhio in O, che sotto l' angolo dato A O B guardi l'oggetto A B. Pe' tre punti A, B, O si faccia passare la circonferenza di un cerchio, il che si otterrà con la presente proposizione, dico, il centro di quel cerchio esser quel punto, da cui guardando l' oggetto, apparirà sotto l' angolo A C B, il qual sarà doppio dell'angolo A O B. Poichè (*a*) l' angolo al centro è doppio dell' angolo alla circonferenza.

(*a*) Per la Propos. 9.

Uso della Prop. XIV.

Problema optico.

Tav. VI. Fig. VII. Dato un qualunque oggetto R O E S, e fuori di esso una linea diritta in qualunque modo collocata, purchè giaccia orizzontalmente, trovare nella data linea uno, o più punti, da' quali guardando l' oggetto apparisce sotto un angolo retto, cioè di 90 gradi.

Sia la data linea A B, la lunghezza dell'oggetto O E dividasi per metà in C, e facendo centro in C col raggio C E descrivasi un cer-

cerchio, il quale o fegherà la data linea AB, o la toccherà, o non l' incontrerà in alcun modo. Se la fega, dico, i due punti P, M, in cui la fega effere i punti cercati. Poichè per la propofizione tirando le linee O P, E P, e inoltre le linee E M, O M, i due angoli O P E, E M O faranno retti, cioè di 90 gradi. E non potendo il cerchio fegar la data linea retta in più, che due punti, non più, che due faranno i punti prefi nella data linea, da quali l' oggetto fi vedrà fotto un angolo retto. Se poi la tocca, la toccherà in un fol punto, e un folo farà nella data linea il punto cercato. Se non l' incontra in alcun modo, quefto farà fegno, che il problema in tali circoftanze farà impoffibile. Dalla fteffa propofizione nafce il feguente teorema.

Teorema optico.

Se l'occhio fia collocato in un piano, che fia perpendicolare al pian dell' oggetto, non è poffibile trovare un punto, da cui tanto la lunghezza, quanto l'altezza, o larghezza dello fteffo piano fi vegga fotto un angolo retto. Sia un palazzo R O E S, al cui piano fia perpendicolare il piano del cerchio O P M E, il che avverrà, fe il cerchio fia in un piano orizzontale, farà chiaro, che in ciafcun punto della circonferenza del cerchio la lunghezza O E apparirà fotto un angolo retto; Tav. VI. Fig. VII.

dico

dico nessun punto potersi trovare in questa circonferenza, da cui anche l' altezza GD apparisca sotto un angolo retto. Poichè dal punto D a qualunque punto della circonferenza, come in P tirisi una linea retta, dico, dal punto P l' altezza D C non potersi vedere sotto un angolo retto, come la lunghezza si vede. Poichè si concepisca il triangolo PDG. Essendo retto l' angolo P D G, se l' angolo G P D fosse pur retto, in un triangolo due angoli sarebbono uguali a' due retti. Il che essendo impossibile (*a*), impossibile pur sarà vedere dal punto P l' altezza D C sotto un angolo retto. La stessa dimostrazione vale per qualunque altro punto della circonferenza. Onde non sarà possibile trovare quel punto nella circonferenza. Che se da questa si vorrà uscire, purchè l' occhio rimanga nello stesso piano, non sarà possibile alcun punto, da cui o l' altezza, o la lunghezza apparisca sotto un angolo retto. Il che è agevol cosa ad intendere posta la precedente dimostrazione.

(*a*) Cor. della Propos. 1. del I.

Uso della Prop. XV.

Problema optico.

Tav. VI. Fig. VIII. Data la lunghezza O E di un oggetto, e un qualunque angolo X, trovare un punto, da cui il dato oggetto si vegga sotto l' angolo dato. Sulla lunghezza E O al punto O si fac-

faccia l'angolo E O D uguale al dato X. Dal punto O si alzi la linea O P perpendicolare ad O E, e dal punto E la linea E S perpendicolare ad O D, dico, che il punto P, in cui queste due linee s'incontreranno, soddisfà al problema, cioè, che l'angolo O P E, sotto di cui si vede dal punto P l'oggetto O E, è uguale al dato X. Poichè, divisa ugualmente in C la linea O P col raggio C O descrivasi un cerchio O M P, il qual passerà pel punto S, poichè l'angolo O S P è retto per costruzione, ed essendo C O perpendicolare ad O E, la linea O E sarà tangente del cerchio, di cui sarà segante la O D. Onde per la proposizione l'angolo E O S sarà uguale all'angolo O P S, o vero O P E. Ma l'angolo E O S è per costruzione uguale al dato X. Onde al dato X sarà uguale ancora l'angolo O P E. Sicchè l'oggetto O E nel punto P si vedrà sotto l'angolo dato X. Ciò ec.

Uso della Prop. XVI.

Problema optico.

Data la lunghezza di un oggetto O E trovare il centro di un cerchio, nella cui circonferenza posto l'occhio in qualunque punto di essa vede la data lunghezza sotto un angolo dato X. Tav. VI. Fig. IX.

Secondo la proposizione pigliando la data O E trovisi il centro di un cerchio, che passando

ſando per le eſtremità di eſſa, ſia corda di un archo OSE, il qual faccia al centro un angolo doppio del dato X, cioè l' angolo OCE. Onde ſaranno gli angoli alla circonferenza OME, OPE uguale al dato X. Che ſe l' oggetto medeſimo ne impediſſe dal deſcrivere l' arco OSE, ſi deſcriva l' arco OME, il quale ſia doppio del complemento dell' angolo dato X a due retti, e ſi otterrà lo ſteſſo fine.

Uſo della Prop. XVII.

Problema fiſico geografica.

Dato il terreſtre diametro, è l' altezza della terreſtre atmosfera, trovare la lunghezza della via del raggio orizzontale dentro la ſteſſa atmosfera. Sia il globo terreſtre ORN, e l' atmosfera, che lo circonda ſia rappreſentata dal cerchio concentrico SBMA, la cui altezza OS ſia data, ſi cerca la lunghezza della linea BO, o ciò, che è lo ſteſſo OA, la quale, è la via di un qualunque raggio orizzontale LO dentro la terreſtre atmosfera.

Tav. VI. Fig. X.

Soluzione.

L' altezza data SO ſi moltiplichi per la linea OM compoſta del terreſtre diametro OE, e di una uguale altezza di atmosfera EM. Dal prodotto ſe ne eſtragga la radice.

ce. Dico, una tal radice esser la via del raggio cercata. Poichè essendo B A linea orizzontale; sarà perpendicolare alla S M, onde O B uguale ad O A; e pel primo caso il rettangolo di SO in OM uguale al quadrato di OB. Adunque estrattane la radice si otterrà la linea OB.

Sia l'altezza dell'atmosfera O S di 12 miglia italiane. Questa è una delle maggiori altezze da' moderni determinate. Sia il terrestre diametro di 6880 di tali miglia. Il valore di tali miglia sia di 5706 piè parigini per ciascuno, come ho detto nell'uso della proposizione VIII. Onde sarà la linea O M di tali miglia italiane 6892. Sicchè il rettangolo di 12 in 6892 sarà di miglia italiane 82704, la cui radice prossimamente minore è di miglia italiane 287. Onde O B sarà di miglia italiane 287, cioè maggiore 25 volte della S O. Ecco per tanto la ragion fisica, onde spiegare la gran debolezza, o diminuzione della vivezza de' raggj di un celeste corpo, quando esso nasce, o tramonta. I suoi raggj allora debbono fare per l'atmosfera un viaggio 25 volte più lungo di quello, che fanno, quando il celeste corpo stà sul nostro Zenith, e tanto più dissipandosi i raggj, quanto più lunga è la via, e quanto in essa di maggior numero sono i corpicciuoli opachi, che gli riflettono più tosto, che o gli rifrangano, o li lascino liberamente passare per le loro vie, essendo allora la via lunghis-

ghiſſima, eſſi deboliſſimi pervengono nella noſtra retina. Che ſe l' altezza dell' atmosfera ſi faccia minore di 12 miglia, come è veriſimile, che ſia, allora maggior numero di volte la via del raggio orizzontale ſupererà la verticale. Poichè a far l' atmosfera di 8 miglia la ſupera di quaſi 30 volte.

Uſo della Prop. XVIII.

Problema geografico.

Data l' altezza di una montagna ſopra l' equilibrio del mare, e la lunghezza della linea viſuale orizzontale, trovare il diametro, o ſemidiametro della terra.

Tav. VI. Fig. X. Sia AP l' altezza della montagna dall' equilibrio del mare PO, e AO ſia la lunghezza data della linea viſuale orizzontale, che in O toccherà la marittima ſuperficie, e ſi abbia a trovare il terreſtre diametro PF.

Soluzione.

Dal quadrato della linea AO ſi ſottragga il quadrato dell' altezza AP. Ciò, che avanza, ſi divida per la ſteſſa altezza AP, dico, che il quoziente di tal diviſione è il cercato terreſtre diametro. Poichè eſſendo AO tangente del cerchio OREN, ſarà il ſuo quadrato uguale al rettangolo di PA in AF (a). Ma il rettangolo di PA in AF è uguale al quadrato di AP col rettangolo di AP in PF.

(a) Per la Prop.

PF. Onde sottraendo il quadrato di A P da ambe le parti, sarà la differenza de' due quadrati A O, A P uguale al rettangolo di A P in P F. Onde dividendo tal differenza per A P, ne riuscirà il diametro cercato P F.

Esempio.

Sia A P l'altezza del monte Paterno, la quale secondo le iterate osservazioni del Grimaldi, e Riccioli è di 195 passi Bolognesi. Questo monte Paterno è lontan da Bologna quasi 3 miglia.

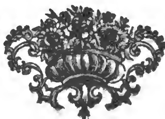
Sia A O la lunghezza della linea orizzontale frapposta fra lo stesso monte Paterno A, e la spiaggia, e principio del mare Adriatico tra Ravenna, e Comacchio, la qual lunghezza dalle osservazioni dello stesso Riccioli si deduce, ed è di passi Bolognesi 37801

Onde sarà il quadrato di 37801	di 1428915601 passi
Il quadrato di A P cioè di 195	37025
Differenza de' due quadrati	1428878576, la qual
differenza dividendo per 195, si otterrà il	
terrestre diametro di	$7378864 \frac{96}{195}$ passi Bo-

lognesi, i quali ridotti a piedi Parigini somministrano 5171353843 piedi; facendo il passo Bolognese di 5 piedi Bolognesi, e facen-

do il piede Bolognese di particelle decime di linea Parigina 1682.

Vero è, che un tal diametro è sensibilmente maggiore del vero il quale secondo le misure Piccardiane si fa di piè Parigini 39231564. Ma ciò deriva non già dall' insufficienza dello stesso problema, il quale da se somministrerebbe un diametro così giusto, come qualunque altro; ma bensì dalle rifrazioni de' raggj, le quali alterano sensibilmente la dirittura del raggio, e per ciò, qualunque misura, la qual sia fondata, come la nostra, sopra la via rettilinea del raggio medesimo.



ELEMENTO

QUARTO.

LEZIONE UNICA
DEL QUARTO
ELEMENTO.

1. Che contenga questo Elemento, e quanto sia più ampio presso i più moderni, che non era presso gli antichi. 2. Quanto sia esso nel suo genere imperfetto, e perchè non si possa condurre alla sua perfezione. 3. Quanto lo anno alcuni guastato, e corrotto in vece di perfezionarlo, ed errore del Rinaldini dal VVagnero dimostrato. 4. Per qual modo possa supplirsi al difetto di questo Elemento, con una soluzion meccanica, e come una tal soluzione punto non nuoca al rigor geometrico. 5. Qual novità per noi si faccia in questo Elemento, e perchè si faccia.

1 QUesto quarto Elemento gli antichi Geometri fino quasi al principio di questo secolo ristrignevano alle sole figure rettilinee di più angoli (che poligoni si chiamano), le quali possano nel cerchio iscriversi, e circoscriversi. Figura nel cerchio iscritta chiamasi quella, nella quale la cima di ciascun' angolo sia in qualche punto della periferia dello stesso cerchio. Figura circoscritta al cerchio, dicesi quella, in cui ciascun de' lati tocca il cerchio, a cui dicesi circoscritta. Ma essendovi infinite altre figure di quat-

tro, o più lati, che son rettilinee, e pure non son capaci di essere nè iscritte al cerchio, nè ad esso circoscritte, la notizia, e costruzion delle quali è anche all'architettura civile, alla militare, e all'agrimensoria, necessaria, anno fatto lodevolmente i più moderni, i quali stendono questo Elemento ancora a' poligoni irregolari, che non possono nel cerchio essere iscritti. Regolare noi diciamo un poligono, se i suoi lati, e i suoi angoli sien tutti uguali, irregolare se nol sono. Un tal esempio noi seguiamo, e lo hà seguito innanzi a noi il VVolfio al cap. 5 de' suoi Elementi.

2 Niuno Elemento è meno perfetto di questo quarto Elemento, e ciò, o cogli antichi si ristringa, o co' moderni più ampiamente si stenda. Poichè tolto il triangolo, il quadrato, il pentagono, l'exagono, e que' poligoni, che da' sopraddetti dipendono, non si è ritrovata fino a dì nostri la maniera di ordinare al cerchio altre figure regolari coll' uso de' soli Elementi. Poichè niuno è stato fin'ora, che con essi abbia al cerchio ordinato l'eptagono, l'enneagono, l'endecagono, e infinite altre figure certamente ordinabili al cerchio. Ciò è avvenuto non per colpa de' Geometri, ma per la natura di queste stesse figure, la costruzion delle quali dalla più sublime geometria, e dal calcolo letterale dipende. L'ignoranza di questa dipendenza, e quasi natural legame è stata cagione di studj,

dj, e fatiche vane a molti mezzani Geometri, che molto intraprendono, perchè poco penetrano le naturali affezioni delle figure.

3 Per la stessa ignoranza è avvenuto a questo Elemento, ciò, che alle cose imperfette comunemente succede, che mentre molti si affaticano per recarle a giusto compimento, alcun sempre vi hà, che corrompe quel poco di bene, che in esse così imperfette pur si trovava. Il che hà fatto Gian Carlo Rinaldini, il quale intendendo di dare una universal regola da descrivere qualunque poligono hà tolto alla geometria, ciò che essa hà di vantaggio sopra le altre facoltà, cioè la dimostrazione, e la certezza. Poichè una tal regola esser falsissima è dimostrato in una particolar dissertazione promulgata in Helmstad dal Signor VVagnero, e dal VVolfio nella sua Analisi. Il che gioverà di avere in questo luogo avvertito o giovani Geometri, perchè da somiglianti regole inserite per lo più ne' libri di pratica geometria, vi teniate, il più che si può, lontanissimi.

4 E ciò farete voi non solamente per non iscambiare, e confondere la dimostrazion colla falsità, ma eziandio, perchè e più facilmente, e senza alcun pericolo di errore voi potrete per altra via giugnere allo stesso termine. Poichè è pronta, e facile la risoluzion meccanica, che danno i medesimi Geometri di questo universal problema. Questa risoluzione basterà, e per gli usi della civile architettu-

ra, e della militare; Nè è da temerſi, che la geometria ſi contamini con ſomiglianti meccaniche ſoluzioni, poichè eſſe per meccaniche ſi danno, non già per geometriche. Oltre di che l' eſſer meccanica una ſoluzione non è la ſteſſa coſa, che eſſer falſa; anzi egli è eſſer veriſſima, ſupponendo però una tal diviſione di angolo, la quale, avvegnacchè per geometria più ſublime poſſa ottenerſi, pure per maggior agevolezza, ſi ſuppon fatta artificialmente. Queſta diviſione artificiale all'uſo è ugualmente eſatta, che la geometrica. Tale diviſion meccanica, io col VVolfio ſuppongo, come ipoteſi del problema ampliſſimo, e neceſſario; che è in queſto Elemento la prop. 5, e 6.

5 Fuori di queſte due, le altre ſoluzioni ſon geometriche; benchè eſſe ſien tanto facili a dimoſtrarſi, che io ſon contento di ſolamente accennare, non di ſtendere minutamente le dimoſtrazioni. Il che ancora è fatto, perchè alcun paſcolo ſi laſci ancora al voſtro intelletto. In queſto Elemento altra novità da me non s' introduce, che di aggiugnere, come hò ſignificato, due propoſizioni intorno alle figure irregolari incapaci di lor natura ad eſſere al cerchio ordinate, ed altre due intorno al general problema di ordinare al cerchio, e di formar ſopra una data linea un qualunque poligono. Per amor di brevità, e di maggior facilità ſi tralaſcia l' antica e celebre coſtruzion del pentagono, e quin-

e quindecagono, non solamente perchè nel general problema si racchiude, ma ancora perchè essa a' principianti suol essere di non lieve impaccio. Ecco adunque dichiarato ciò, che hò proposto, cioè, che contenga questo Elemento, e quanto da' moderni si stenda, dove consista l'imperfezion di questo Elemento, e perchè non trovi rimedio, quanto anno contaminato questo Elemento alcuni con intendimento di dargli il suo compimento, come possa supplirsi a tal difetto, e qual novità per noi s'introduca, e per qual ragione.



PROPOSIZIONE I.

di Eucl. 2. e 3.

Dato un cerchio iscriverci, e circoscriverci un triangolo di angoli uguali agli angoli di un dato triangolo.

Spiegazione.

Tav.VII. Fig.I. Sia il cerchio dato A E G, e il triangolo di angoli dati M N O, si hà da iscrivere, e circoscrivere nel dato cerchio un triangolo, che abbia gli angoli uguali agli angoli M, N, O.

Prima parte.

Costruzione.

A qualunque punto A del dato cerchio si tiri la tangente P A R. Al punto A si faccia l' angolo P A B uguale all' angolo O, e in oltre l' angolo R A D uguale all' angolo N. E congiungansi i due punti B D, dico, il triangolo A B D avere gli angoli uguali agli angoli del dato triangolo.

Dimostrazione.

Essendo l' angolo P A B uguale all' angolo O per costruzione; e parimente uguale all' angolo B D A (*a*) sarà l' angolo B D A uguale all' angolo O. Similmente l' angolo R A D uguaglierà l' angolo N per costruzione, e l' angolo A B D (*b*), onde anche l' angolo A B D uguaglierà l' angolo N. Onde anche il

(*a*) Propos. 15. del 3.

(*b*) Propos. 15. del 3.

il terzo angolo BAD uguaglierà il terzo angolo M. Sicchè il triangolo ADB è il cercato.

Seconda parte.

Costruzione.

Dal centro si tirino a' tre lati del triangolo inscritto tre perpendicolari, che incontreranno la circonferenza ne' tre punti F, G, E, a quali tre punti tirinsi linee parallele a' lati corrispondenti HL a BD, LI ad AD, HI ad AB; le quali linee saranno tangenti de' medesimi punti; dico, il triangolo circoscritto avere gli angoli cercati.

Dimostrazione.

Poichè stendendosi un lato BD fino ad X, sarà l'angolo ADB uguale all'angolo IXB, e l'angolo IXB uguale all'angolo ILH. Onde l'angolo ADB uguaglierà l'angolo ILH. Ma l'angolo ADB per la prima parte uguaglia l'angolo O; onde anche l'angolo ILH uguaglierà l'angolo O. Similmente mostrasi l'angolo IHL uguagliare l'angolo N; e il terzo angolo I uguagliar l'angolo M. Onde ec.

PROPOSIZIONE II.

di Eucl. 4.

Dato un qualunque triangolo iscriverci un cerchio.

Costruzione.

Tav.VII. Fig. II. Sia il dato triangolo A B O. L' angolo A dividasi per metà per la linea A M. Similmente l' angolo O dividasi per metà per la linea O N. Dal punto C, in cui queste due linee s' incontrano si conduca la linea C P perpendicolare ad A O. E col raggio C P facendo centro in C descrivasi un cerchio. Dico esser fatto.

Dimostrazione.

Poichè si tirino le altre due perpendicolari C E, C S. Queste due perpendicolari C E, C S sono uguali alla C P. Poichè ne' due triangoli rettangoli C P O, C E O, essendo i due angoli P O C, E O C uguali per costruzione, sarà anche l' angolo P C O uguale all' angolo O C E. Ma il lato C O è comune. Onde (*a*) il lato C P uguaglia il lato C E. Lo stesso lato C P mostrasi uguale a C S colla stessa dimostrazione, essendo ne' due triangoli C P A, C S A gli angoli adjacenti, e un lato fra loro uguali. Or essendo uguali queste tre linee C P, C E, C S, il cerchio passerà pe' punti E, S, e toccherà i due

(*a*) Pro-pos. 4. del 1. El.

i due lati B O, B A, come tocca il terzo A O. Poichè queste tre linee sono perpendicolari a' raggi (b). (b) Propos. 6. del 3.

PROPOSIZIONE III.

di Euclide 5. e 6.

Iscrivere, e circoscrivere al dato cerchio un quadrato.

Prima parte.

Costruzione.

Si tirino due diametri E B, A D l'uno all'altro perpendicolari. Si conducan le linee A B, A E, E D, D B. Dico A B D E essere un quadrato iscritto. Tav. VII Fig. III.

Dimostrazione.

I quattro angoli E A B, A B D, B D E, D F A son retti (a) e le quattro linee A B, B D, D E, E A sono uguali, per essere il quadrato di ciascuna uguale a due quadrati del raggio. Onde A B D E è il cercato quadrato. (a) Propos. 14. del 3.

Seconda parte.

Costruzione.

A' due punti A, D tirinsi due linee parallele al diametro E B, cioè perpendicolari all'altro diametro A D. Agli altri due punti B, E tirinsi due altre linee perpendicolari

al

al diametro EB, o parallele all' altro AD, dico, IG essere il quadrato cercato.

Dimostrazione.

Imperocchè le quattro linee IH, HG, GF, FI sono uguali a' diametri, onde sono fra loro uguali. In oltre sono ad angoli retti, e toccano il cerchio. Onde il quadrato è circoscritto al cerchio.

Corollario.

E' manifesto, che il quadrato circoscritto al cerchio è doppio dell' iscritto. Poichè il quadrato CH è doppio del triangolo ACB; il quadrato CI del triangolo ACE, il quadrato CF del triangolo ECD, il quadrato CG del triangolo DCB. Onde i quattro quadrati, cioè il quadrato circoscritto è doppio de' quattro triangoli, cioè del quadrato iscritto.

PROPOSIZIONE IV.

Iscrivere, e circoscrivere a un cerchio un Exagono regolare.

Costruzione.

Tav.VII Fig.IV. Tirisi un qualunque diametro AE: a' due punti A, E come centri col raggio EC, AC descrivansi due archi di cerchio BCM, DCO, i quali archi incontrino la periferia del dato cerchio ne' punti B, M, D, O. Si

Si tirino le linee BA, AM, MO, OE, ED, DB. Dico esser fatto il cercato exagono, o sia la figura di sei lati.

Dimostrazione.

I due triangoli ACB, ECD sono triangoli equilateri. Poichè le tre linee AC, CB, BA sono raggj dello stesso, o ugual cerchio. Lo stesso dicasi de' tre lati DC, CE, ED. Onde tanto l'angolo ACB, quanto l' angolo ECD sono uguali ad una terza parte di due retti. (*a*) Sicchè presi insieme sono uguali a due terze parti di due retti. Ma i tre angoli insieme ACB, BCD, DCE sono uguali a due retti. Onde l'angolo BCD dee essere uguale all'altra terza parte di due retti, cioè uguale a ciascun de' due ACB, ECD. Onde la linea BD uguaglierà ciascuna delle due BA, DE (*b*). Similmente mostrasi, che la linea, o lato MO è uguale a ciascun degli altri due AM, EO. Onde tutti i sei lati sono fra loro uguali, cioè è stato iscritto l'exagono ABDEOM.

(*a*) Cor. della Propos. 16. del 1. El.

(*b*) Prop. 12. del 3.

Che se ciascun di questi lati dividasi per metà per esempio in P, e dal centro si tiri la linea CP, che si stenda, finchè incontra la circonferenza in R, e al punto R si tiri la linea IS parallela ad AM, e allo stesso modo si tirino le altre linee, come si è fatto nella proposizion 1, sarà circoscritto al cerchio l'exagono regolare.

Co-

Corollario I.

E' manifesto, che il lato A M, e ciascun altro dell'exagono iscritto al cerchio è uguale al raggio del cerchio, a cui s'iscrive. Poichè il triangolo A C M, e qualunque altro è equilatero. Onde A C è uguale ad A M.

Corollario II.

Che se si conduca la linea A D essa sarà il lato di un triangolo regolare nel cerchio iscritto, sù cui si potrà descrivere il triangolo regolar circoscritto nel modo, che del triangolo irregolare si è fatto nella Prop. I.

PROPOSIZIONE V.

Dato un cerchio iscriverci, e circoscriversi un qualunque Poligono Regolare.

Soluzione.

Questo Problema hà due casi. Il primo, quando il poligono ha tanti lati, che coll'ajuto del quadrato, e dell'exagono possa descriversi. Il secondo, quando esso hà tanti lati, che così non possa descriversi.

Caso I.

Tav. VII Fig. III. Sia dato ad iscriversi nel cerchio un poligono di 8 lati, cioè un ottogono. Ciascun arco del quadrato iscritto dividasi per metà (a) in O, in L, in M, in N e tirinsi le linee A L, L B, B M ec. Dico esser descrit-

(a) Cor. della 13. del 3.

scritto l' ottogono. Suddividendo gli archi dell' ottogono formasi una figura di 16 lati, e suddividendo ciascun arco di questa formasene una figura di 32 lati. Per lo stesso modo coll' exagono formasi una figura regolare inscritta di 12, di 24, di 48, lati ec.

Caso II.

Che se il poligono regolare colle divisioni, e suddivisioni de' sopradetti archi non possa descriversi, si scioglierà il problema meccanicamente in quest'altro modo. Primieramente i 360 gradi, ne' quali dividesi la circonferenza, si dividano pel numero de' lati del poligono cercato. Secondariamente nel dato cerchio piglisi un' arco di tanti gradi, quanti dalla divisione ne resultano. In terzo luogo si tiri la linea, che seghi quell' arco, la qual linea nel cerchio inscrivendosi tante volte, quante si può, formerà il poligono cercato.

Esempio.

Sia da inscriversi un pentagono, cioè una figura regolare di 5 angoli, o lati dividendo pel primo precetto i 360 gradi per 5, riusciranno gradi 72. Pel secondo precetto si pigli l' arco A B di 72 gradi, o ciò che è lo stesso l' angolo al centro A C B di gradi 72. In terzo luogo tirisi la linea A B, la qual trasportando da B in D, da D in E, da E Tav. VII. Fig. V.

O in O,

in O, da O in A si sarà inscritto il pentagono. A circoscrivere il pentagono ci varrà lo stesso pentagono iscritto, tenendo la stessa costruzione fatta nella Prop. 1.

Corollario I.

E' chiaro che a descrivere qualunque altro poligono regolare, o circoscriverlo a un dato cerchio, basterà sapere quanti gradi sega nel cerchio ciascun lato di esso, o ciò che è lo stesso, qual sia l' angolo al centro, che ciascun lato forma. A questo intendimento aggiugnerò una tavoletta, nella cui prima colonna siano i lati del poligono, nella seconda gli angoli, che ciascun lato di esso forma al centro del cerchio, e nella terza gli angoli, che ciascun lato forma coll'altro.

Lati del Poligono.	Angoli che ciascun lato fa al centro.	Angoli che i lati fanno tra di loro
	o gradi	gradi
Trigono. III.	120.	60.
Quadrato. IV.	90.	90.
Pentagono. V.	72.	108.
Hexagono. VI.	60.	120.
Heptagono. VII.	$51\frac{3}{7}$	$128\frac{4}{7}$
Octogono. VIII.	45.	135.
Enneagono. IX.	40.	140.
Decagono. X.	36.	144.
Endecagono. XI.	$32\frac{8}{11}$	$147\frac{3}{11}$
Duodecagono. XII.	30.	150.
Tredecagono. XIII.	$28\frac{9}{13}$	$152\frac{3}{13}$
Quaterdecagono. XIV.	$25\frac{10}{14}$	$154\frac{4}{14}$
Quindecagono. XV.	24.	136.
Sexdecagono. XVI.	$22\frac{1}{2}$	$157\frac{1}{2}$

L'uso di questa tavola è il seguente. Si pigli nella prima colonna il numero de' lati del poligono, che vuolsi o iscrivere, o circoscrivere al cerchio. A questo numero di lati corrisponderà nella seconda colonna l'angolo, che al centro forma ciascun lato del poligono. Si formi al centro del cerchio un

tal angolo tante volte, quante si può, e alla circonferenza si formeranno tanti lati, quante volte l' angolo si contiene in quattro angoli retti, quanti se ne possono formare intorno a un punto.

PROPOSIZIONE VI.

Descrivere sopra una data linea retta un qualunque Poligono Regolare.

Sia la data linea A B, e si abbia sopra di essa a descrivere un eptagono, cioè una figura di 7 angoli, o lati.

Soluzione.

Tav. VII. Fig. VI. I. Al punto B si faccia l' angolo D B A uguale all' angolo, che all' eptagono si conviene nella terza colonna della tavola, che è di gradi $128\frac{4}{7}$.

II. Si faccia la linea BD uguale alla data AB, e tanto l' una, che l' altra si divida per metà in C, e in P.

III. A' punti C, P si alzin due perpendicolari, le quali in qualche punto O si incontreranno.

IV. Al punto O come centro, col raggio O A descrivasi un cerchio, in cui pigliando le linee DE, EF, FG, GH, HA uguali alla data A B, si farà descritto l' eptagono. Lo stesso dee farsi per qualunque altro po-

poligono, purchè l' angolo D B A sia tale, quale ad esso poligono si conviene nella terza colonna della tavola.

PROPOSIZIONE VII.

Dati tutti i lati di una qualunque figura irregolare, e gli angoli che le diagonali posson fare ad un punto della figura descrivere, e costruir la figura.

Siano dati i lati di una figura irregolare BC, CD, DE, EA, AB, e gli angoli CBD, DBE, EBA, che le diagonali DB, EB formano al punto B. Tav.VII Fig.VII

Soluzione.

I. A qualunque punto B facciasi l' angolo A B C uguale alla somma degli angoli, che forman le diagonali, il qual angolo A B C dividasi negli angoli A B E, E B D, D B C, che le stesse diagonali formano.

II. Indi facciasi A B uguale al primo lato, B C al secondo. Facendo centro in C, raggio il terzo lato si tiri un arco, che incontri la diagonale B D nel punto D, e tirisi la linea D C. Similmente facendo centro in D, e raggio il quarto lato tirisi l' arco, che incontri in E l' altra diagonale. E fatto centro in E, raggio il quinto lato descri-

vasi un arco, il quale dee passare pel punto A, e chiuder la figura, che avrà i lati, e gli angoli dati.

Corollario.

Questa proposizione può esser giovevolissima per formar la pianta di un qualunque piano sia regolare, o irregolare chiuso da linee diritte. Poichè se da un punto B si osserveranno gli angoli che fan le diagonali ABE, EBD, DBC, e poi si vadano misurando i lati B C, C D, ec. con una pertica: si potrà con una scala, e coll' ajuto di questa proposizione compire l' Icnografia, o pianta di quel piano, in piccolo, quanto si voglia.

PROPOSIZIONE VIII.

Dati tutti i lati di una figura rettilinea, e tutti gli angoli, che fanno i lati fra di loro fuori solo tre angoli, costruir la figura.

Soluzione.

I. Si tiri la linea A B uguale ad uno de' lati dati, e a' punti A, B forminsi i due angoli E A B, ABC uguali a due angoli dati.

II. Si facciano le due linee A E, B C uguali agli altri due dati lati.

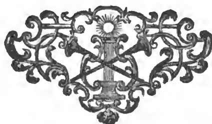
III. Se non restano altro, che due lati, si fac-

facciano centri i due punti C, E, e raggj i due lati che avanzano si descrivan due archi, che in qualche punto D s' incontreranno.

IV. Al punto dell' incontro D si conducan due linee E D, C D. Dico essere costruita la cercata figura.

Avvertimento.

Questa Proposizione può esser giovevolissima, come la precedente per le Icnografie de' piani.



ELEMENTO
QUINTO.

LEZIONE UNICA
DEL QUINTO
ELEMENTO.

1. *Che sia* proporzione, o ragione, *e perchè essa dicasi* relazione scambievole. 2. *Perchè debba essere tra* due *grandezze* omogenee. 3. *Perchè tra grandezze* terminate, e secondo le lor quantità. 4. *Che sia proporzion* razionale, *e* irrazionale, *che quantità* commensurabili, *e* incommensurabili, *che parte* aliquota, & aliquanta. 5. *Che sia* somiglianza *di ragione*. 6. *Qual sia la ragion* maggiore, *qual la* minore. 7. *Quale la proporzion* continua, *qual la* discreta. 8. *Qual la ragion* duplicata, triplicata, *ec.* 9. *Con quali segni si scrivano le proporzioni delle quantità.*

TUtta la difficoltà di questo Elemento è riposta nell'intendere le difinizioni della ragione, o proporzione, e della somiglianza della proporzione medesima. In queste due definizioni assaissimo discordano i Geometri. E poichè sopra di queste due si appoggia tutto questo libro, secondo che esse si prendono, variano i teoremi, e dimostrazioni di esso. Adunque (*a*) ragione, o proporzione, che in latino chiamasi *Ratio*, e *Proportio*, altro non è, che *una certa* scambievole relazione, o convenienza, o rispetto, che anno due quantità

(*a*) Defin. 1.

tità omogenee terminate, o due grandezze omogenee terminate, per quanto riguarda la lor *quantità*. Si dice per tanto in primo luogo, la proporzione essere *una certa* relazione, o convenienza, *o rispetto*; Poichè siano due lunghezze, o linee A, B, le quali avranno ciascuna la sua quantità, o lunghezza. Voi potrete paragonare, e confrontare la quantità dell' una colla quantità dell'altra, e asserire l'una esser maggior dell'altra, o minore, l' una esser di tanto maggiore, o di tanto minore. Or ciò, onde voi potete far questo paragone, e confronto è quello stare una linea all' altra per tal modo, quel riferirsi l'una all'altra per tal modo, quel convenire l' una all' altra per tal modo, cioè come maggiore a minore, e come minore a maggiore, o come di tanto maggiore, o come di tanto minore. Appunto una tal abitudine, relazione, convenienza, riguardo, attitudine al confronto, o paragone io chiamo proporzione. Onde è, che se le due grandezze sono uguali, la proporzione sarà di ugualtà, di inugualtà se son disuguali. Si dice in secondo luogo, questa proporzione essere *scambievole*. E ciò, perchè il paragone si può cominciar dalla prima, e terminar nella seconda, si può cominciar dalla seconda, e terminar nella prima. Così paragonando le due linee A, B voi potete asserire *la linea A* è maggiore, o di tanto maggiore della *linea B*, o pure, *la linea B* è minore, e di tanto minore

Tav. VIII. Fig. I.

nore

nore della *linea A*. Onde è da avvertirsi, che quella quantità, onde il paragone cominciasi, chiamasi *Antecedente*, appunto perchè nel paragone precede; quella poi, ove si termina chiamasi *conseguente*, appunto perchè nel paragone vien dietro alla prima. Tanto l'antecedente, che la conseguente chiamansi *termini della ragione*.

2 In terzo luogo dicesi essere tal relazione tra = due quantità =. Poichè, affinchè possa esservi confronto, e paragone è necessario, che almeno due sian quelle cose, che si confrontano, e l'una all' altra si riferiscano. Da ciò non segue, che una quantità segandosi in una, o più parti, non possa l' una parte all' altra riferirsi, e paragonarsi. Poichè dopo il segamento di una linea A C per esempio in qualunque punto E così la A E può paragonarsi alla E C, come potrebbe paragonarsi, se la E C non fosse posta per diritto colla A E, ma o formasse un qualunque angolo, o fosse staccata. Poichè per piegamento, o per separazione, che facciasi le quantità delle linee non mutano punto. Dicesi in quarto luogo, la proporzione dover essere tra *due quantità*, o grandezze *Omogenee*, cioè tra quelle, a cui si conviene la medesima general definizione della loro estensione, o quantità. Così tra due linee o sian diritte, o sian curve, tra due superficie o piane, o curve, tra due solidi, tra due tempi, tra due velocità, tra due forze può esservi

Tav. VIII. Fig. I.

pro-

proporzione. Ma tra'l tempo, e il corpo, tra la velocità, e la superficie non può esservi ragione alcuna. Poichè essendo queste tali cose di diverso genere, e natura anche nella lor quantità non sono fra di loro paragonabili.

3 Diconsi tali grandezze, o quantità *terminate*, cioè finite. Poichè se una di esse fosse finita, infinita l'altra, la proporzion sarebbe nulla. Se fossero infinite amendue, quantunque esse sien paragonabili, come le quantità finite, e possano aver quella proporzione, che è tra due quantità finite, pure non potendosi negli Elementi dimostrar questo stesso, e anche negandosi da alcuni, o almeno patendo di molte difficoltà, è ben fatto il ristrignersi negli Elementi al solo paragone delle grandezze finite, che non può rivocarsi in dubbio da alcuno. Finalmente si aggiugne = per quanto riguarda le lor quantità =. Il che Euclide, il Clavio, il Tacquet, lo Chales, e moltissimi altri Geometri esprimono con quelle parole *secundum quantitatem*, le quali bastevolmente cuoprono quegli autori dalla taccia, che loro dà il VVolfio, (*b*) seguendo il Leibnizio. Bisogna bene intendere, che due grandezze posson essere l'una all'altra riferite, e paragonate per rispetto alle loro posizioni, cioè rispetto alle distanze, che anno o fra di loro, o da qualche punto fisso, rispetto agli angoli, che formano queste grandezze, rispetto alla figu-

(*b*) *El. Math. Tom.* 1. *§.* 127. *Pag.* 43. *Edit Genev. an.* 1732.

ra

ra che anno, riſpetto al modo, in cui eſſe ſono ordinate a qualche curva. Or tutti queſti paragoni non ſono al caſo per noi. Noi riguardiamo la ſola eſtenſione, e per ora niente conſideriamo la poſizione di queſta eſtenſione. Sia la diſtanza, la forma, l'ordine delle particelle di una grandezza in qualunque modo ſi voglia, noi la riguardiamo, come pura grandezza, e così ad un altra la riferiamo.

4 Queſta tal ragione, e proporzione, che abbiamo fin' ora ſpiegata, può eſſere razionale, o irrazionale. (c) Proporzion razionale (c) Definiz. 21
chiamaſi quella, che trovaſi tra due quantità, che anno una comune miſura, (d) le (d) Defin. 3.
quali appellanſi quantità commenſurabili. Quantità commenſurabili ſarebbon due linee, delle quali una foſſe di due palmi, l'altra di 9. Poichè il palmo è miſura comune sì della prima, che della ſeconda, delle quali eſſo ſarebbe parte, che chiamaſi = aliquota = (e) (e) Definiz. 4.
cioè = parte, che alcune volte preſa eſauriſce sì la linea di due palmi, che quella di nove =. Per la ſteſſa ragione due qualunque numeri interi ſono fra loro commenſurabili. Poichè ſempre l' unità è comune loro miſura, e parte aliquota di ciaſcuno di eſſi. La ragione adunque, che è tra due numeri interi quali ſi ſiano, è ſempre ragione razionale, e la ragione, che paſſa tra due linee, che ſien commenſurabili, come abbiamo detto eſſer tutti i numeri interi, diceſſi = ragione,

o pro-

plici, asserendo, allora quattro grandezze aver la stessa ragione, quando accresciute con qualunque possibile moltiplicazione istessa la prima, e la terza, che sono i due antecedenti, che con altro nome chiamansi termini homologi, e accresciute ancora con qualunque altra moltiplicazione stessa la seconda, e la quarta, che sono i due conseguenti, che pur chiamansi termini homologi, sempre avviene, che se il moltiplice della prima è maggiore del moltiplice della seconda, ancora il moltiplice della terza è maggiore del moltiplice, della quarta; se il moltiplice della prima è uguale al moltiplice della seconda, ancora il moltiplice della terza è uguale al moltiplice e se è minore, sarà della quarta, pur minore. Una tal dottrina si pretende da alcuni (*) poco salda, i quali vorriano, che Euclide avesse questo stesso dimostrato, che ogni qualunque volta gli ugualmente moltiplici o insieme avanzano, o insieme mancano, o insieme sono uguali a conseguenti, le grandezze anno la stessa ragione. Checchessia di ciò, certo è, che questa dottrina è lunga, e non necessaria, e se ancor si vuole, è una dottrina, che dalle stesse ragioni somiglianti siegue qual corollario, ma non è delle stesse proporzioni la principal proprietà. Noi dunque diremo allora la prima grandezza avere

P alla

(*) De Chales, Tacquet.

alla seconda quella stessa ragione, che hà la terza alla quarta, quando la prima tante volte contiene la seconda o qualunque parte aliquota della seconda, quante volte la terza contiene la quarta, o la stessa parte aliquota della quarta. Così ove la grandezza A tante volte contiene la grandezza B o qualunque parte centesima, millesima, bismillesima, millionesima, e qualunque altra all' infinito della grandezza B, quante volte la grandezza C contiene la grandezza D o una parte centessima, millesima, bismillesima, millionesima, e qualunque all'infinito della grandezza D, allora io dirò aver la medesima ragione la grandezza A alla grandezza B, che hà la grandezza C alla D. Questa tal proprietà è la primaria ed è generale, che si conviene alla proporzion di ugualtà, ed inugualtà, alla proporzion razionale, e irrazionale, benchè diversamente vada applicata alla razionale, e alla irrazionale. Per riguardo alla razionale la parte aliquota è determinata. Poichè una tal determinata parte aliquota esser dee comune misura di due termini, e alcune volte presa esaurire giustamente il primo, alcune altre volte presa esaurire il secondo. Laddove nelle irrazionali la parte aliquota prendesi indefinitamente, e sempre lascia alcun avanzo nel primo, e nel secondo antecedente. Onde parlandosi delle irrazionali la somiglianza di ragione potrebbe spiegarsi così. Se una parte aliquota della seconda quantità, la

Tav. VIII. Fig. II.

la quale si concepisca esser sempre minore, e minore all' infinito tante volte contiensi nella prima quantità, quante una simil parte aliquota della quarta minore pur essa all'infinito, contiensi nella terza in tal modo, che avanzando sempre all'infinito alcuna cosa alla prima, avanzi pure alla terza, allora la prima alla seconda avrà somigliante ragione, che la terza alla quarta. Poichè se all' infinito tante parti aliquote con qualche avanzo conterrà la prima della seconda, quante la terza della quarta con qualche avanzo, si potrà paragonare la prima alla seconda allo stesso modo, che la terza alla quarta. E la dissomiglianza della ragione sarà infinitamente piccola, cioè nulla. Quì è da avvertire, che mal si direbbono le quantità aver la stessa ragione, se le differenze sono proporzionali, che allora le somiglianti proporzioni, per altre somiglianti proporzioni si definirebbono. Male ancor si direbbe = Se gli avanzi, o differenze son somiglianti =. Poichè tali avanzi esser somiglianti che altro è, che esser eglino proporzionali?

6 Siccome di quattro grandezze la prima può aver colla seconda una stessa ragione, che hà la terza alla quarta, così la prima alla seconda può aver maggiore, o minor ragione di quella, che la terza hà alla quarta. Allora dicesi quella prima avere maggior ragione (*k*), quando essa qualche volta di più contiene una qualunque parte aliquota della

(*k*) Defin. 9.

feconda , che la terza non contenga della quarta , e ciò o la prima fia maggiore , o fia minor della feconda . Così il 51 al 10 dicefi aver maggior ragione , che non hà il 100 al 20. Poichè l' unità , che è parte aliquota del 10 è contenuta cinquanta volte , più una fimil parte aliquota , laddove il 2 , che è del 20 tal parte aliquota , qual' è del 10 l' unità , è contenuto nel 100 non più , che 50 volte . (l) Minor ragione avrà la prima grandezza alla feconda , fe una qualunque parte aliquota della feconda minor numero di volte è contenuta nella prima , che non fia una fimil parte aliquota della quarta contenuta nella terza . Così il 49 al 10 hà minor ragione , che il 100 al 20. Poichè l' unità , che è parte aliquota del 10 è contenuta 49 volte nel 49 , laddove il 2 , che è fimil parte aliquota del 20 è contenuto nel 100 cinquanta volte . Il numero delle volte , che la quantità minore è contenuta nella maggiore , chiamafi (m) = Denominator della ragione = Quefta maggiore , o minor ragione può fpiegarfi ancora così . Allora la ragione della prima quantità verfo la feconda è maggior della ragione , che hà la terza verfo la quarta , quando la prima quantità è maggior del bifogno , cioè maggior di quel , che farebbe neceffario perchè la fua ragione alla feconda foffe la fteffa , che quella della terza alla quarta . E allora farà minore , quando effa è minore di quel , che faria neceffario perchè la fua ragione

(l) Defniz. 10.

(m) Defin. 11.

ne alla seconda potesse dirsi simile alla ragion della terza verso la quarta. Dall' ugualtà, o somiglianza di due proporzioni già da noi stabilita si può intelligibilmente spiegare, che sia mai parte simile, o che siano parti simili. Allora dunque (*n*) io dirò due parti di due grandezze esser fra di loro somiglianti, quando queste parti medesime, o una loro parte simile aliquota qualunque ugual numero di volte è contenuta nelle quantità intere. Così qual parte è il 4 del 24, tal parte è il 3 del 18. Poichè come il 4 è sei volte contenuto nel 24, così il 3 nel 18. Lo stesso vale per le parti aliquote simili del 4, e del 3. Poichè come per esempio la metà del 4, cioè il 2 si comprende dodici volte nel 24, così la metà del 3, cioè $1\frac{1}{2}$ si contien dodici volte nel 18.

(*n*) Definiz. 11.

7 E' da avvertirsi, che per aver due proporzioni, o ragioni non è necessario, che le quantità siano quattro, potendo in tre quantità esservi due ragioni. Il che avverrà, quando la seconda quantità sarà il termine conseguente della prima, e insieme l' antecedente della seconda. Così fra tre linee, delle quali la prima sia di 3 palmi, la seconda di 6, la terza di 12 vi son due ragioni, cioè quella, che passa tra i 3 palmi, e i 6, e quella, che passa tra i 6, e i 12 palmi. Se le due ragioni, che passano fra tre quantità sono somiglianti, o uguali, allora le tre quantità diconsi = in proporzion continua (*o*) =.

(*o*) Definiz. 13.

Sicchè proporzion continua altro non è, se non quella, i cui termini medj prendonsi due volte, una come conseguenti per riguardo alla prima, l' altra come antecedenti per riguardo alla seconda. Che se ciascuna quantità prendasi una sol volta, e sianvi due ragioni, quelle quantità diconsi essere in proporzion (*p*) = discreta, o discontinua =.

(p) Definiz. 14.

8 Che se non già tre grandezze, ma quattro, o più siano continuamente proporzionali, la prima alla terza si dice aver ragion *duplicata*, di quella che ha la prima alla seconda. (*q*) La prima alla quarta ragion *triplicata*, alla quinta quadruplicata, ec. Così sia una quantità A a un' altra B, come la quantità B a un altra C, e similmente B alla C, come la stessa C a un altra D. Sicchè le quantità A, B, C, D, E, ec. Siano in continua ragione, sarà la A alla C in ragion duplicata, alla D in ragion triplicata, alla E in quadruplicata ragione. Si dice primieramente in ragion duplicata, perchè tra la A, e la C vi son di mezzo due proporzioni, la proporzion di A in B, e la proporzion di B in C. Si dice in ragion triplicata A a D, perchè in mezzo vi corrono tre ragioni, o proporzioni. Sia A uguale a 2, B uguale a 4, sarà C uguale a 8, D a 16, E a 32 ec.

(q) Definiz.

9 Finalmente egli è da avvertirsi, che i Geometri moderni per isfuggire le molte parole, che bisognerebbono per ispiegare le proporzioni, si vagliono di alcune caratteristi-

che,

che, o segni, o simboli, co' quali essi significano l'ugualtà della proporzione, che corre tra due coppie di grandezze. Siano dunque quattro grandezze A, B, C, D, e pongasi essere la A alla B, come la C alla D, se queste quattro grandezze si scrivan con questi segni A : B = C : D, vuol significarsi essere la A alla B, come la C alla D, o la proporzione della A alla B essere uguale alla proporzione della C alla D. Altri poi scrivon così

A . B : : C . D, e significano con questi segni la stessa cosa, cioè essere la A alla B, come la C alla D.

Similmente il segno di addizione è +

Il segno di sottrazione è —.

Onde quando scrivesi A + B, intendesi A aggiuntavi la B, o vero A più B; quando scrivesi A — B, intendesi A detratta la B, o vero A meno B. Ecco spiegato in questa lezione 1. Che sia *proporzione*, *o ragione*, e perchè essa dicasi *relazione scambievole*. 2. Perchè debba essere tra *due* grandezze *omogenee*. 3. Perchè debba essere tra grandezze *terminate*, e *secondo la lor quantità*. 4. Che sia proporzion *razionale*, e *irrazionale*, che siano quantità *commensurabili*, e *incommensurabili*, che parte *aliquota*; & *aliquanta*. 5. Che sia *somiglianza*, *ugualtà*, o *identità* di ragione. 6. Qual sia la ragion *maggiore*, qual la *minore*. 7. Quale la proporzion *continua*, qual la *discreta*. 8. Qual la ragion *duplicata*, *triplicata*,

ta, ec. 9. Con quali segni si scrivano le proporzioni delle quantità.

Avvertimento.

Questo Elemento secondo Euclide contien 25 proposizioni, delle quali essendo le prime sei solo necessarie per dimostrar le altre coll' uso delle quantità ugualmente moltiplici, saranno da noi tralasciate. Alle 25 di Euclide altri ne aggiungono altre dieci, le quali si raggirano intorno alle ragioni maggiori, le quali pur noi tralasceremo per amor della brevità.

Postulato Unico.

Tav. VIII. Fig. III. Date tre quantità A, B, C, domandasi una quarta quantità D, alla quale la quantità C abbia la stessa ragione, che la quantità A hà alla B.

PROPOSIZIONE I.

di Euclide 7.

Se due quantità ſono uguali, anno ad una terza medeſima quantità una ragion ſomigliante, ed una terza medeſima quantità hà alla prima di due quantità uguali quella ſteſſa ragione, che hà alla ſeconda.

Spiegazione.

Siano A, B due quantità, o grandezze uguali, o eſſe ſian due linee, o due piani, o due corpi, e ſia una terza grandezza C omogenea alle due prime. Dico primieramente, quella ſteſſa ragione avere la grandezza A alla terza C, che hà la grandezza B alla ſteſſa C. Dico ſecondariamente, la quantità C aver la ſteſſa ragione alla quantità A, che hà colla quantità B. Tav. VIII. Fig. IV.

Dimoſtrazione della prima parte.

Se la grandezza A alla terza C non aveſſe la ſteſſa ragione, la quantità A ſarebbe o maggiore, o minore della quantità B.

Poichè ſe non aveſſe la ragione ſteſſa, avrebbe alla C o maggior ragione, o minore di quella, che hà la quantità B alla ſteſſa C. Or ſe hà maggior ragione, ſarà maggiore della B. Poichè (*a*) una qualche parte aliquota della C più volte conterraſſi nella A, che nella B non ſi contenga. Il che è eſſer maggiore. Se al contrario la ragione è minore, la ſteſſa parte aliquota della C minor numero di volte conterraſſi (*b*) nella A, che nella B non ſi contenga, cioè la A ſarà minore.

(*a*) *Per la Def. 9.*

(*b*) *Defin. 10.*

Ma

Ma ſecondo l' ipoteſi la quantità A non è nè maggiore, nè minore della quantità B.

Poichè per ipoteſi è uguale.

Onde la grandezza A alla terza C avrà la ſteſſa ragione, che la grandezza B uguale ad A hà alla ſteſſa C.

Dimoſtrazione della ſeconda parte.

Se la grandezza C non hà alla grandezza A quella ſteſſa ragione, che hà alla grandezza B, le due grandezze A, B non ſarebbono uguali.

Poichè, ſe non hà la ſteſſa ragione ad amendue, avrà maggior ragione ad una di eſſe per eſempio A, che all' altra B. Onde (c) una parte aliquota, per eſempio milleſima della A più volte ſarebbe contenuta nella C, che una parte ſimilmente milleſima della B. Al che è neceſſario, che queſta parte milleſima ſia minore. Onde che tutta la quantità A di queſte mille parti minori ſia minore della quantità B, di cui ciaſcuna delle mille parti è maggiore.

(c) Definiz. 9.

Ma ſecondo l' ipoteſi ſono uguali.

Onde la grandezza C hà la ſteſſa ragione alla A, che alla B. Ciò ec.

PROPOSIZIONE II.

di Euclide 8.

Se due grandezze sono inuguali, la maggiore hà maggior ragione ad una terza stessa grandezza, che non ne abbia la minore, e se una terza grandezza hà maggior ragione con una di due quantità, che con un' altra, quella, rispetto a cui la ragione è maggiore, sarà minore.

Spiegazione.

Siano due quantità inuguali A E, B, delle quali A E sia maggiore, B sia minore, e sia una terza quantità C. Dico prima, esser maggiore la ragione della A E alla terza C, che non è la ragione della B alla stessa C. Si faccia D E uguale a B. Tav. VIII. Fig. V.

Dimostrazione della prima parte.

La quantità A E alla quantità C hà maggior ragione, che la sua parte D E alla stessa C.

Poichè potendosi la quantità C dividere all' infinito in parti aliquote sempre minori, si verrà finalmente ad una tal parte aliquota, che sia o uguale alla A D, o minore. Ma questa parte aliquota più volte sarà contenuta nella A E, che nella D E, dovendo una volta almen di più contenersi per la D A. Onde A E alla C avrà maggior ragione, che non ne abbia D E alla stessa C (*a*).

Ma la parte D E alla terza C hà la stessa ragione, che B alla C (*b*). Onde la grandezza A E alla terza C hà maggior ragione, che

(*a*) Defin. 9.
(*b*) Propos. 1.

che non ne abbia la grandezza minore B. Ciò ec.

Dico secondariamente, che se la terza quantità C ha minor ragione alla A E, che non ne abbia alla B, la B sarà minore della A E.

Dimostrazione della seconda parte.

Se la grandezza C hà maggior ragione colla B, che colla A E, una parte aliquota della B sarà più volte contenuta nella C, che la simile parte aliquota della A E. Onde la parte aliquota della B sarà minore, che la simile parte aliquota della A E. Onde tutta la B sarà minore, che tutta la A E. Ciò ec.

Corollario.

Indi deducesi, che una stessa grandezza C hà minor ragione colla maggiore A E, che colla minore B. Poichè se non hà minor ragione, avrà o maggiore, o ugual ragione. Ma non l' hà nè maggior, nè uguale. Poichè se l' avesse maggiore, la grandezza A E sarebbe minor della grandezza B (*c*), e se l' avesse uguale, la grandezza A E sarebbe uguale alla B (*d*). Le quali cose son contro l' ipotesi. Onde la grandezza C avrà minor ragione colla maggiore A E, che colla minore B.

(c) Per la 2. parte della Prop.

(d) Per la Propos. 1.

PROPOSIZIONE III.

di Eucl. 9.

Quelle grandezze, che ad una stessa terza grandezza anno la stessa ragione sono uguali, e quelle grandezze, a cui una terza stessa grandezza hà la ragion medesima sono uguali.

Spiegazione.

Siano due grandezze A, B, le quali abbiano ad una stessa C la medesima ragione. Dico prima le due grandezze A, B essere uguali. Tav. VIII. Fig. VI.

Dimostrazione della prima parte.

Se la grandezza A non è uguale alla B, non hà verso la terza C la stessa ragione, che la B alla stessa C.

Poichè non essendo uguale sarà o maggiore, o minore, se è maggiore avrà alla C maggior ragione, che non ne abbia la B (a), e se è minore avrà ragion minore. Onde non essendo uguale non avrà mai la stessa ragione.

(a) Prop. 2.

Or secondo l'ipotesi essa hà la stessa ragione. Onde sarà uguale.

Dico secondariamente, che, se la ragion, che la C hà alla A, è somigliante a quella, che hà alla B, la grandezza A è uguale a B.

Dimostrazione della seconda parte.

Se la grandezza A non è uguale alla B, la grandezza C non hà verso la A la stessa ragione, che verso la B.

Poi-

Poichè non essendo uguale sarà maggiore, o minore. Se è maggiore la grandezza C avrà verso essa minor ragione, che verso la B (b), se è minore la stessa C avrà verso essa maggior ragione, che verso la B. Onde non avrà la stessa ragione.

(b) Proposiz. 2.

Ma secondo l' ipotesi la grandezza C hà con amendue A, B la stessa ragione.

Onde la grandezza A è uguale a B. Ciò ec.

PROPOSIZIONE IV.

di Eucl. 10.

Di due quantità inuguali quella, che ad una terza medesima quantità hà maggior ragione, è maggiore, e quella di due quantità inuguali, a cui la stessa quantità hà maggior ragione, è minore.

Spiegazione.

Tav. VIII. Fig. VII

Siano A, B due grandezze disuguali, e sia C una qualunque terza grandezza, riguardo a cui la grandezza A abbia maggior ragione, che la grandezza B, dico la grandezza A essere maggior di B.

Dimostrazione della prima parte.

Se la grandezza A non è maggiore di B, sarà o uguale, o minore. Ma secondo la nostra supposizione non è nè ugual, nè minore.

Poichè secondo la supposizione la grandezza A hà maggior ragione alla C, che non ne abbia la B alla stessa C. Se fosse, uguale, avrebbe ugual ragione, e non maggiore (a); se poi fosse minore, avrebbe minor ragione alla stessa C, della ragione, che hà la grandezza B alla stessa C (b). Onde non può essere nè ugual, nè minore.

(a) Proposiz. 1.
(b) Proposiz. 2.

On-

Onde resta, che la grandezza A sia maggior della grandezza B. Ciò ec.

Dico in secondo luogo, che supponendo maggiore la ragione della C alla B, che non è della stessa C alla A, sarà la grandezza B minore.

Dimostrazione della seconda parte.

La grandezza B non può esser nè ugual, nè maggiore della grandezza A.

Poichè se fosse uguale, ugual sarebbe la ragione della C tanto alla B, che alla A (c). Il che è contro l'ipotesi. Se poi fosse maggiore, la grandezza C a B maggiore, avrebbe minor ragione, che non hà alla A (d). Il che pure è contro l'ipotesi, secondo cui la ragion di C a B è maggiore.

(c) Proposiz. 1.
(d) Proposiz. 2.

Onde riman, che sia minore. Ciò ec.

PROPOSIZIONE V.

di Euclide 11.

Quelle ragioni, che sono somiglianti, uguali, le stesse ad una terza medesima ragione, sono uguali, somiglianti, le stesse ancor fra di loro.

Spiegazione.

Sia la ragione della grandezza A alla grandezza B somigliante alla ragione della grandezza C alla grandezza D. Sia pur E ad F in ragion somigliante della stessa C alla D, dico, essere la ragione di A alla B, come la ragione della E ad F.

Tav. VIII. Fig. VIII.

Que-

Questa Proposizione è un assioma, ma per maggior chiarezza si dimostra.

Dimostrazione.

Poichè A a B hà la stessa ragione, che C a D (a) tante volte A conterrà qualunque parte aliquota di B, quante volte C contiene simile parte aliquota di D.

(a) Defin. 8.

Ma quante volte C contiene qualunque parte aliquota di D, tante volte E contiene una simile parte aliquota di F.

(b) Ivi. Poichè la ragione di C a D è la stessa, che di E ad F (b).

Sicchè tante parti aliquote di B conterrà la grandezza A, quante parti aliquote di F conterrà la grandezza E. Cioè la ragione di A per riguardo a B è la stessa, che di E per riguardo ad F (c). Ciò ec.

(c) Ivi.

Corollario.

Ma se le ragioni di A a B, e di E ad F si suppongono uguali, e la ragione di C a D sia maggiore, o minore della ragione di A a B, sarà pur maggiore, o minore dell'altra ragione di E ad F. Essendo questo un assioma, e incluso nell' assioma 1 di questi Elementi, per ciò come di tale ce ne siam serviti alla Prop. 2.

PROPOSIZIONE VI.

di Euclide 12.

Siano quante si vogliano grandezze fra lor proporzionali, dico così essere una delle antecedenti ad una delle conseguenti, come tutte insieme le antecedenti a tutte insieme le conseguenti.

Spiegazione.

Siano quattro, o più grandezze A, B, C, D, le quali si suppongano proporzionali. Sicchè sia come A a B, così C a D, dico, così essere A, che è una delle due antecedenti a B, che è una delle conseguenti, come le due antecedenti A, C prese insieme alle due conseguenti B, D prese insieme. Tav. VIII. Fig. IX.

Dimostrazione.

Essendo A a B, come C a D, tante volte una qualunque parte aliquota di B sarà in A contenuta, quante volte la stessa parte aliquota di D sarà contenuta in C (*a*). (*a*) Definiz. 8.

Per esempio se una terza parte di B è contenuta in A sei volte, ancora una terza parte di D sarà contenuta in C sei volte.

Onde le due simili parti aliquote di B, e di D prese insieme tante volte saranno contenute nelle due grandezze A, C prese insieme quante volte la parte aliquota di B è contenuta in A.

Per esempio, se una terza parte di B entra sei volte in A, e una terza parte di D sei volte in C, la somma delle due

terze parti entrerà pur sei volte nella somma delle due grandezze A, C. Poichè le due grandezze insieme formeran 12 parti, delle quali due son le due parti aliquote. Or tante volte è contenuto nel 12 il 2, quante volte una terza parte di 3, cioè una nel 6.

Sicchè le due grandezze A, C anno alle due grandezze B, D la stessa ragione, che hà una di esse A alla sua conseguente B (b). Ciò ec.

(b) Def. 8.

Esempio numerico.

Sia la grandezza A di 6 palmi, B di 3, C di 8, D di 4. Onde queste grandezze saranno proporzionali.

Sarà la somma de' due antecedenti di	14 palmi
La somma de' due conseguenti di	7 palmi

Sarà dunque come è in fatti 14 : 7 = 6 : 3. E se si trovassero altre due quantità nella stessa ragione, delle quali una fosse di palmi 10, l'altra di 5, facendo ancor di questo antecedente cogli altri antecedenti, e di questo conseguente cogli altri conseguenti sarà come in fatti è, 24 : 12 = 6 : 3.

PROPOSIZIONE VII.

di Euclide 13.

Se due ragioni son tra loro uguali, e una di esse sarà maggiore, o minore di una terza ragione, anche l' altra sarà maggiore, o minor di essa terza.

Spiegazione.

Sia la ragione di A a B la stessa, che la ragione di E a F, e la ragione di A a B sia maggiore, o minore di una terza ragione di C a D anche la ragione di E ad F sarà maggiore, o minore della ragione di C a D. Tav. VIII. Fig. VIII.

Questa Proposizione è la stessa, che il corollario della 5 proposizion ed è un assioma.

PROPOSIZIONE VIII.

di Eucl. 14.

Se una prima grandezza avrà alla seconda la ragione medesima, che hà la terza alla quarta, e la prima sarà o maggiore, o minore, o uguale alla terza, ancor la seconda sarà maggiore, o minore, o uguale alla quarta.

Spiegazione.

Sia la grandezza A alla grandezza B, come la grandezza C alla D, dico primiera- Tav. VIII. Fig. X.

Q 2 men-

mente, che, se A è maggior di C, anche B sarà maggiore di D.

Dimostrazione della prima parte.

Giacchè la grandezza A è maggior della grandezza C, sarà la ragione della A verso B maggiore della ragione di C verso la stessa B (*a*).

(a) Proposiz. 2.

Ma la ragion della A verso la B è la stessa, che la ragione della C verso la D per l'ipotesi.

Onde la ragion della C verso D è maggiore, che non sia la ragion della C verso B (*b*). Onde la grandezza D sarà minore della B (*c*). Ciò ec.

(b) Proposiz. 7.
(c) Propos. 4.

Dico in secondo luogo, che se D sia minor di B, anche C sarà minor di A.

Dimostrazione della seconda parte.

Giacchè la grandezza D è minore della grandezza B, sarà la ragione di D verso C minore della ragione di B verso C (*d*).

(d) Proposiz. 2.

Ma la ragion di D verso C è uguale alla ragione di B verso A per l'ipotesi. Onde la ragion di B verso A è minore, che non è la ragion di B verso C (*e*). Onde la grandezza A è maggiore della grandezza C (*f*). Ciò ec.

(e) Propos. 7.
(f) Propos. 4.

Dico in terzo luogo, che se A è uguale a C, ancor B sarà uguale a D.

Dimostrazione della terza parte.

Giacchè la grandezza A è uguale alla C, sarà la ragione di A a B uguale alla ragione di C a B (*g*).

(g) Propos. 1.

Ma

Mà la grandezza A hà a riguardo della B la stessa ragione, che C alla D per l' ipotesi. Onde la grandezza C alla B hà la stessa ragione, che C alla D (*h*). Onde B sarà uguale a D (*i*). Ciò ec. (*h*) Prop. 5. (*i*) Prop. 3.

PROPOSIZIONE IX.

di Euclide 15.

Le parti aliquote simili di due grandezze qualunque sono fra di loro nella stessa ragione, che le grandezze medesime.

Spiegazione.

Siano due grandezze C O, D R, e sia la grandezza A una parte aliquota della grandezza C O, sia B simil parte aliquota della grandezza D R, dico, così essere A alla B, come la CO alla DR. Tav. VIII. Fig. XI.

Dimostrazione.

S' intenda tanto la CO, che la DR divisa nelle sue parti C*a*, *ab*, *bc*, ec. D*h*, *hi*, *il*, ec. in modo, che ciascuna parte della CO sia uguale ad A, e ciascuna della DR uguale a B, sarà pertanto C*a* alla D*h*, come la A alla B. Parimente *ab* ad *hi*, come A alla B, e così delle altre parti. Onde saranno tutte insieme le antecedenti C O a tutte insieme le conseguenti D R come A alla B (*a*), (*a*) Per la Prop. 6.

 cioè

cioè le due grandezze saranno fra di loro, come le parti simili aliquote A, B. Ciò ec.

Corollario.

Non solamente le grandezze intere sono proporzionali ad una delle loro parti aliquote simili, ma eziamdio a più parti aliquote, ma di ugual numero, per esempio a tre, a quattro, a cinque, ec. di tali simili parti aliquote. Poichè sarà Cc a Dl, come A a B (b). Ma CO a DR. Si è mostrata come A alla B; Onde sarà (c) Cc a Dl, come CO alla DR; Onde generalmente due parti aliquote simili moltiplicate per ugual numero, sono come le intere grandezze.

(b) Per la Propos. 6.

(c) Propos. 5.

Avvertimento.

Secondo il metodo di Euclide questa proposizione doveva enunciarsi così. Le *quantità* ugualmente moltiplici son fra di loro nella stessa ragione, in cui sono le quantità di cui esse sono ugualmente *moltiplici*. Ora queste quantità di cui sono ugualmente moltiplici non son altro, che le parti aliquote simili, di cui valendomi io, per esse hò enunciata la proposizione. Il che servirà per non aggiugner nuove idee di cose.

PROPOSIZIONE X.

di Eucl. 16.

Se quattro grandezze omogenee saranno proporzionali, sarà la prima alla terza, come la seconda alla quarta alternativamente.

Spiegazione.

Siano quattro quantità omogenee A, B, C, D, delle quali sia A a B, come C a D. Dico essere alternando A a C, come B a D. Due sono i casi di questa proposizione. Il primo è quando la proporzione è razionale, il secondo quando è irrazionale. Tav. VIII. Fig. XII.

Dimostrazione del I. Caso.

Essendo A a B, come C a D, una parte aliquota di B tante volte è contenuta in A, quante volte una simil parte aliquota di D è contenuta in C (*a*). Onde (*b*) sarà la A alla C, come la parte aliquota di B alla simil parte aliquota di D. Ora ciò, che è stato detto di una parte aliquota della B, e della D dicasi di 2, di 3, di 8 parti aliquote, o di tutte le parti aliquote della B, e della D (*c*), cioè delle stesse grandezze B, e D. Onde sarà la A prima, alla C terza, come la B seconda alla D quarta. Ciò ec.

(*a*) Defin. 8.
(*b*) Per la Prop. 9.
(*c*) Cor. della Prop. 9.

Dimostrazione del II. Caso.

Essendo A a B come C a D, una parte aliquota di B minore, e minore all'infinito tante volte sarà in A contenuta, quante volte una simil parte aliquota di D minore, e minore all'infinito è contenuta in C. Onde A

(d) Propos. 9. sarà alla C (*d*), come la parte aliquota minore all'infinito di B alla simil parte aliquota di D. Lo stesso dicasi di più parti aliquote, e lo stesso di tutte le parti aliquote della B, e della D, cioè della stessa B, e

(e) Cor. della Prop. 9. D (*e*). Onde sarà A alla C, come B alla D. Ciò ec.

Questa maniera di argomentare chiamasi latinamente *alternando*, o vero *permutando*. Adunque alternare, o permutare non è altro, che pigliare un antecedente con uno antecedente, ed un conseguente con un conseguente, cioè pigliare i due antecedenti, come i due primi termini della proporzione, e i due conseguenti, come i due secondi.

PROPOSIZIONE XI.

di Eucl. 18.

Se le grandezze divise saran proporzionali, ancor le composte saran proporzionali.

Spiegazione.

Tav. VIII. Fig. XIII. Siano AB a BC, come DE ad EF, dico essere AC a BC, come DF ad EF.

Di-

Dimostrazione.

Essendo AB : BC = DE: EF, sarà pure permutando AB : DE = BC : EF (*a*). Onde (*b*) i due antecedenti AC a' due conseguenti DF sono come BC ad EF. E permutando AC: BC = DF: EF (*c*). Ciò ec.

(*a*) Prop. 9.
(*b*) Prop. 6.
(*c*) Prop. 9.

Questa maniera di argomentare chiamasi composizion di ragione, e in latino = *compositio rationis* = . Composizion di ragion non è altro, che pigliar la somma degli antecedenti, e conseguenti, come antecedenti, e i conseguenti, come conseguenti.

Corollario.

Indi dimostrasi la conversion della ragione, che è diversa cosa dalla ragione inversa di cui a suo luogo si dirà, che da alcuni chiamasi ancora *conversa*. Poichè la conversion della ragione è il prender, che facciamo, gli antecedenti, come antecedenti, e la differenza degli antecedenti da' conseguenti, come conseguenti. Sia AC : BC = DF : EF, dico essere ancora AC : AB = DF : DE. Poichè essendo AC : BC = DF : EF, sarà dividendo AB : BC = DE: EF. E invertendo BC : AB = EF : DE. E componendo AC : AB = DF : FE.

PROPOSIZIONE XII.

di Eucl. 17.

Se le quantità composte saranno proporzionali, ancor separate saranno proporzionali.

Spiegazione.

Tav. VIII. Fig. XIII. Siano due quantità AC, DF composte la prima delle due AB, BC, la seconda delle altre due DE, EF per tal modo, che ciascuna di esse composte abbia ad una delle due componenti la stessa ragione, cioè AC sia a BC, come DF, ad EF, dico ancor le divise aver la stessa ragione, cioè AB essere a BC, come DE ad EF.

Dimostrazione.

Se AB non è alla BC, come la DE alla EF, una di queste due ragioni sarà maggiore, o minore. Poniamo la ragione di DE alla EF esser maggiore. Vi sarà dunque un altra grandezza *a*F tale, che sia AB alla BC, come *a*E alla EF.

(*a*) Prop. 11. (*b*) Per la Propos. 5. (*c*) Propos. 10.

Onde sarà componendo (*a*) AC alla BC, come *a*F alla EF, ma per ipotesi AC alla BC, come DF ad EF. Onde (*b*) sarà DF alla EF, come la *a*F alla EF. E permutando (*c*) DF alla *a*F come la EF alla stessa EF, cioè in ragion di ugualtà, il che è impossibile. Onde sarà AB alla BC, come DE alla EF. Ciò ec.

Que-

Questa maniera di argomentare chiamasi in latino *dividendo*, e *diviso rationis* ec.

Corollario.

Se sia AB: BC = DE; EF, dico essere ancora BC : EF = AB: DE. Poichè componendo sarà AC: AB = DF: DE(*d*). E dividendo BC: AB = EF : DE (*e*). E permutando BC : EF = AB : DE. (*f*). (*d*) Propos. 11. (*e*) Propos. 12. (*f*) Propos. 9.

Questa maniera di argomentare chiamasi in latino *invertendo*: Adunque ragione inversa altro non è, che pigliar come antecedenti i conseguenti, e come conseguenti gli antecedenti.

PROPOSIZIONE XIII.

di Euclide 19.

Se sarà una intera quantità a una intera quantità, come la parte alla parte, sarà come l'avanzo all'avanzo, così l'intera all'intera.

Spiegazione.

Sia AC : DF = AB : DE. Dico essere BC : EF = AC : DF. Tav. VIII. Fig. XIII.

Dimostrazione.

Essendo AC : DF = AB : DE, sarà alternando (*a*) AC : AB = DF: DE. Onde AC : BC = DF : EF. (*a*) Propos. 9.

Poichè se da due quantità intere si tolgano due parti simili avanzano due parti simili.

E permutando (*b*) BC : EF = AC : DF. Ciò ec. (*b*) Ivi.

Le Proposizioni 20, e 21 di Euclide a questa nostra maniera non son necessarie. Onde si lasceranno; Essendo esse contenute nella nostra 14 e 15.

PROPOSIZIONE XIV.

di Eucl. 22.

Se vi sono due serie di grandezze di qualsisia numero, e siano in modo, che ciascuna coppia della prima serie, sia ordinatamente nella stessa ragione, che ciascuna coppia della seconda, dico le estreme grandezze dell' una essere nella stessa ragione, che le estreme grandezze dell' altra.

Spiegazione.

Tav. VIII. Fig. XIV. Siano due serie di grandezze la prima A, B, C, D di quantisivoglia termini, la seconda E, F, G, H di ugual numero di termini, e sia A : B = E : F, B : C = F : G. Dico essere A : C = E : G, e se più oltre nelle proporzioni si procedesse, sarebbe pure A : D = E : H.

Dimostrazione.

Essendo A : B = E : F, sarà permutando (*a*) A : E = B : F. Similmente essendo B : C = F : G sarà permutando B : F = C : G. Ma B : F è come A : E. Onde (*b*) A : E = C : G, e permutando sarà A : C = E : G. Similmente mostrerebbesi A : D = E : H. Poichè sarebbe C : G = D : H. Ma C : G = A : E. Onde A : E = D : H. E perciò A : D = E : H. Ciò ec.

(*a*) Prop. 9.

(*b*) Prop. 5.

Questa maniera di argomentare chiamasi in latino = ordinata ratio ragione ordinata.

PROPOSIZIONE XV.

di Euclide 23.

Se di sei grandezze tre sono alle tre nella stessa ragione, ma perturbatamente, ancor le estreme saranno nella stessa ragione.

Spiegazione.

Siano tre grandezze A, B, C, e tre altre E, D, F, e sia A : B = D : F, e in oltre B : C = E : D, il che significa esser perturbata la ragione. Dico essere A : C = E : F. Si aggiunga la quarta grandezza O, e sia B : C = F : O. Tav. VIII. Fig. XV.

Dimostrazione.

Essendo le tre grandezze A, B, C nella stessa ragione ordinatamente, che le tre altre D, F, O, sarà (*a*) A : C = D : O. Ma D : O = E : F.

Poichè F : O = B : C, Ma B : C = E : D. Onde (*b*) E : D = F : O, e permutando D : O = E : F.

Onde (*c*) A : C = E : F. Ciò ec.

Questa chiamasi da' Geometri ragion perturbata.

(*a*) Per la Prop. 14.
(*b*) Prop. 5.
(*c*) Ivi.

PROPOSIZIONE XVI.

di Eucl. 24.

Se la prima grandezza alla seconda hà la stessa ragione, che la terza alla quarta; e la quinta alla sesta, hà la stessa ragione; che la seconda alla quarta, sarà la prima colla quinta alla seconda; come la terza colla sesta alla quarta.

Spiegazione.

Tav. VIII. Fig. XVI. Sia $A : B = C : D$. E sia $E : F = B : D$. Dico essere A più E a B; come C più F alla quarta D.

Dimostrazione.

(a) Propos. 9. (b) Propos. 5. (c) Propos. 12. (d) Per la Propos. 5.

Essendo $A : C = B : D$ (*a*), e $B : D = E : F$ per l'ipotesi, sarà $A : C = E : F$ (*b*) e permutando $A : E = C : F$. Onde componendo sarà (*c*) $A + E : E = C + F : F$. E permutando $A + E : C + F = E : F$. Onde essendo $E : F = B : D$, sarà (*d*) $A + E : C + F = B : D$. E permutando $A + E : B = C + F : D$. Ciò ec.

PROPOSIZIONE XVII.

di Eucl. 25.

Se quattro grandezze sono proporzionali, la massima, e minima sono maggiori delle altre due.

Costruzione.

Dalla massima A B tolgasi la sua quantità conseguente C, che sarà uguale a D B. Similmente facciasi O F uguale a G minima. Dico le due grandezze A B, G, esser maggiori delle altre due. Tav. VIII. Fig. XVII.

Dimostrazione.

La grandezza D B insieme colla grandezza G è uguale alla grandezza O F insieme colla grandezza C.

Poichè per costruzione D B è uguale a C, ed O F è uguale a G.

Ma l' avanzo A D è maggiore dell' avanzo E O.

Poichè essendo D B, O F parti simili delle quantità intere A B, E F, gli avanzi A D, E O avran la ragione delle quantità intere A B, E F (a). Ma A B secondo l' ipotesi è maggior di E F, supponendosi A B massima, onde A D è maggior di E O.

(a) Propos. 13.

Onde alle quantità uguali aggiugnendo da una parte A D maggiore dall' altra E O minore, saranno le quantità B A, G, a cui la maggiore A D si aggiugne, maggiori delle quan-

quantità, F E, C, a cui si aggiugne la minore O E.

Onde la massima, e la minima sono maggiori delle altre due. Ciò ec.

Fin quì le Proposizioni di Euclide, alle quali sogliono aggiugnersi altre 9 proposizioni prese da Pappo, e da altri il cui uso non essendo così ovvio, come l'uso delle già spiegate, noi le tralasceremo. Sarà però ottimamente fatto l'aggiugnere una tavola delle maniere di argomentare nelle proposizioni, di cui niuna cosa è più frequente.

Tav. VIII. Fig. XVIII.



ELEMENTO SESTO.

LEZIONE UNICA
DEL SESTO
ELEMENTO.

1. Che abbracci questo Elemento, e di quanta importanza esso sia. 2. Che sia mai composizion di ragione. 3. Qual differenza corra tra la ragion composta, e la duplicata, triplicata, ec. 4. Come si abbia a dimostrare la ragion composta, e come si abbiano a trovare i termini di tal ragione. 5. Si accennano le ragioni critiche contra la definizion di Euclide, e suoi seguaci. 6. Si accennano le ragioni critiche della più moderna definizione, e sue vantaggio. Si prova la verità di questi più tosto teoremi, che definizioni Elementari.

1 IN questo Elemento altro non si fà, che applicare la dottrina delle proporzioni esposta già nel 5 Elemento alle figure piane, sì rispetto a' lati, da cui esse son terminate, sì rispetto alle aje, o spazj delle figure medesime. Imperocchè il quinto Elemento considera le quantità, o grandezze come quantità, e grandezze, niuna considerazione facendo al modo, e positura, e angoli compresi dalle stesse grandezze. Poichè il buon ordine, e metodo esige, che prima tali grandezze in se medesime si considerino, e

 poi

poi si riguardino come poste per tale, e tal modo, sotto tali, e tali angoli. Il che in questo Elemento si fà. Questo Elemento è di tale importanza, che io ardisco asserire niuna o proposizione, o corollario in esso contenersi, che non sia come una base, e fondamento di una innumerabile moltitudine di teoremi, e problemi sparsi nel vastissimo, e quasi immenso giro delle Matematiche facoltà d' ogni maniera.

2 Essendomi per tanto io proposto di spianare nelle lezioni di ciascun Elemento qualche passo più arduo, e difficile, che in esso si venga ad incontrare, ed essendo in questo Elemento malagevole la dottrina delle ragioni composte, questa composizion di ragioni io intraprendo ad esattamente spiegarvi in questa lezione. Or essendo la maggior difficoltà di tal composizion di ragioni riposta nel diverso definire, e fraseggiar de' Geometri, de' quali chi per un modo, e chi per altro prende a spiegarne la natura, io terrò questa via, di definir prima, che sia mai ragion composta, e come i termini di questa ragione si trovino; poi di riportare le altrui definizioni, e dichiarazioni, esponendo il mio giudizio intorno ad esse. Il che hò giudicato anche necessario di dover fare, perchè senza difficoltà il linguaggio di tutti i Geometri da voi s' intenda, o studiosissimi giovani. Adunque = ragion composta di due ragioni altro non è, che la ragione che pas-

sa tra due grandezze, fra le quali un' altra terza se ne frapponga, a cui la prima grandezza abbia la prima delle due ragioni, e la quale terza alla seconda abbia la seconda delle due date ragioni = Siano per tanto quattro grandezze C, D, E, F, delle quali la prima C alla seconda D abbia una qualunque proporzione, per esempio la proporzione del 6 al 3, e la terza alla quarta abbia un' altra qualunque proporzione per esempio del 12 al 4. Queste due ragioni, o proporzioni son quelle, che si anno a comporre. A tal componimento si pigli una qualunque grandezza A, che sia per esempio di palmi 18. Se dunque si trovasse una tal grandezza B, che frapponendo tra essa grandezza B, e la prima grandezza A una terza grandezza M si trovi essere la ragione della prima A alla terza M somigliante, o uguale alla ragione di C alla D (che è la prima delle due ragioni), e la ragione della stessa terza M alla seconda B somigliante alla ragione della grandezza E alla grandezza F (che è la seconda delle due date ragioni) allora si dirà la ragione della grandezza A alla grandezza B esser composta delle ragioni di C alla D, e della E alla F. Onde ogni qualunque volta interverrà, che fra due quantità A, B possa frapporsene una terza M, a cui la prima A abbia la ragione della C alla D, e la quale M alla seconda B abbia la ragione della E alla F, si dirà la grandezza A alla Tav. IX. Fig. 1.

grandezza B avere la ragion composta delle ragioni della C alla D, e della E alla F. Tal ragion composta avranno nel nostro esempio le due grandezze A, B, se essendo A di palmi 18, sarà la B di palmi 3. Poichè può esservi tra l' A, e la B una grandezza M di 9 palmi, la quale avrà le condizioni richieste. Poichè il 18 al 9 hà la stessa ragione che il 6 al 3, e il nove stesso al 3 hà la ragione del 12 al 4, essendo il 9 triplo del 3, come del 4 è il 12. Ciò che hò detto di due ragioni, vale per tre, o più ragioni.

3 Or egli può primieramente avvenire, che le due date ragioni sien le medesime, o uguali, cioè, che la ragione della C alla D sia la stessa, che la ragione della E alla F, nel qual caso sarà la grandezza A alla grandezza M, come la stessa grandezza M alla grandezza B. Allora si dirà la grandezza A alla B aver ragion duplicata della C alla D, o della E alla F, o della A alla M. Poichè tali proporzioni sono uguali. Ecco dunque in che convengono, e in che differiscono la ragion duplicata dalla composta. Convengono nell' aver le due quantità A, B una tal quantità di mezzo, la qual sia conseguente riguardo al primo A, e antecedente riguardo al secondo B. Differiscono, perchè nella ragion duplicata la ragion della A alla M dee essere necessariamente la stessa ragione della M alla seconda B, laddove nella ragion composta una tal ragione può essere, e

può

può non esser la stessa. Sicchè ogni ragion duplicata può chiamarsi ragion composta, ma non ogni ragion composta può chiamarsi duplicata, ma soltanto quella, in cui le due ragioni, onde essa si compone, sono uguali.

4 Può secondariamente intervenire, che le due grandezze C, D siano uguali alle due grandezze A, M, cioè la grandezza C alla A, e la grandezza D alla M, o ciò, che è lo stesso, che le due grandezze C, D non vi siano, e faccian le lor veci le due grandezze A, M, e allora si dirà le due grandezze A, B avere la ragion composta della A alla M, e della E alla F, quando la grandezza M alla B si trovi aver la proporzione, che hà la grandezza E alla F. In tal caso per dimostrare la grandezza A alla B avere la ragion composta delle ragioni della A alla M, e della E alla F niente altro è da dimostrarsi, se non che, la grandezza M alla grandezza B aver la medesima proporzione, che la grandezza E alla grandezza F. Che se date queste quattro grandezze A, M, E, F voglia trovarsene una quinta B, a cui la prima A abbia la ragion composta delle due ragioni della A alla M, e della E alla F, non si dee fare altro, che trovare una quantità B, a cui la seconda delle quattro grandezze date, M, o il primo conseguente M abbia sa ragione stessa, che corre tra la terza E e la quarta F.

Ma se si dasser quattro grandezze C, D,

E, F, fra le quali fiano le due date ragioni, e in oltre una quinta grandezza A, perchè fe ne trovi una fefta B, a cui la A abbia la ragion compofta delle due date, allora bifognerà primieramente trovare una grandezza M, a cui la A abbia la ragione della C alla D, e poi una grandezza B, a cui la trovata M abbia la ragione della grandezza E alla F.

5 Altri poi (e fono tutti i commentatori degli Elementi di Euclide) la ragion compofta definifcon così = Allora dicefi una ragione effer compofta di più ragioni, quando i denominatori delle ragioni moltiplicati fra di loro daranno qualche ragione = (a). Ma a ben riguardare quefta anche preffo quefti fteffi autori non hà forza di definizione, nè di effa eglino medefimi fi vagliono nel dimoftrare le ragioni compofte. Poichè, quando fi viene a tal dimoftrazione, effi fi vagliono tacitamente della mia definizione, non già della loro. La lor definizione adunque è un teorema veriffimo, ma che ricerca dimoftrazione. A far chiara la verità di tal teorema bafterà farne prova nel noftro efempio. Il Denominator della ragione, che hà la grandezza C alla D è uguale a 2. Poichè il 3 due volte è contenuto nel 6. Il denominator

(a) Clavio def. V. del lib. 6.

tor della seconda ragione è 3. Poichè il 4 nel 12 appunto 3 volte è contenuto. Moltiplicando il 2 per 3 formeremo 6, e appunto il 6. è il denominator della ragione di A alla B, cioè di 18 a 3. Poichè sei volte il 3 è contenuto nel 18. Da questo esempio avrete anche inteso il vero senso della loro definizione, che è questo. Allora una proporzione è composta di due proporzioni, quando il prodotto de' due denominatori delle due proporzioni, è uguale al denominator della proporzione, che si dice composta.

6 Altri (e sono quegli, che a mio giudizio meno geometricamente, e piuttosto Aritmeticamente propongono la dottrina delle proporzioni) (a) allora dicono una ragione esser composta di più ragioni, quando essa è quella stessa, che formano i prodotti di tutti gli antecedenti delle date ragioni, rispetto a' prodotti di tutti i conseguenti delle stesse ragioni. Ancor questa dee pigliarsi come un teorema più tosto, che abbia necessità di dimostrazione, che come una vera definizione. E se di tal definizione alcuno si voglia servire, chiuderà la via alle più semplici, e diritte dimostrazioni geometriche, con cui le ragioni composte si dimostrano. Un tal teorema esser vero, può provarsi coll' induzione (non

(a) VVolfio tom. 1. della nuova Edizione pag. 47. Parag. 159.

(non già dimostrarsi, poichè l'induzione non è dimostrazione) sì del nostro, che di altri esempj. Poichè si moltiplichino i due antecedenti delle due date ragioni, cioè la quantità C, che è di 6 palmi nella quantità E, che è di 12. Il prodotto sarà di 72 palmi. Il prodotto de' due conseguenti D, F sarà di 12 palmi. Or appunto il 18, che è la quantità A al 3, che è la quantità B stà, come 72 a 12. Poichè come il 3 nel 18 è contenuto 6 volte, così 6 volte è contenuto il 12 nel 72. Adunque conchiuderemo tanto la definizione di Euclide, che la definizion de' moderni, essere due proprietà, e affezioni delle ragioni composte, le quali proprietà, e affezioni sono verissime, ma anno bisogno di esser dimostrate. Ecco adunque dichiarato. 1. Che contenga questo Elemento, e la sua importanza. 2. Che sia mai ragion composta. 3. In che differisca dalla duplicata. 4. Come si abbia a dimostrar tal ragione, e come si abbiano a trovare i suoi termini. 5. La definizion di Euclide essere un vero teorema. 6. Tal essere ancora la definizione de' più moderni, e la verità di tali teoremi sol coll'induzione manifestarsi.

Definizione I.

Figure rettilinee somiglianti son quelle, che anno ciascun angolo uguale a ciascun' angolo, e i lati, che comprendono angoli uguali, proporzionali. Così il triangolo ABC sarà somigliante al triangolo *abc*, se ciascun de' tre angoli A, B, C uguagli ciascun de' tre *a*, *b*, *c*, e sia AB : *ab* = BC, *bc*, e BC : *bc* = AC : *ac*, ed AC : *ac* = AB : *ab*. Tav. IX. Fig. II.

Definizione II.

Allora quattro quantità diconsi direttamente proporzionali, quando, riguardando l' ordine, con cui si proferiscono, la prima, e la terza sono i due antecedenti, la seconda, e la quarta sono i due conseguenti. Così le grandezze A, B, C, D diconsi proporzionali direttamente, quando le due grandezze A, C sono i termini antecedenti, e le altre due B, D i conseguenti. Allo stesso modo dicendosi la grandezza A alla B hà la stessa ragione, che la C alla D direttamente, s' intende i termini doversi disporre, come si pronunziano. Ma se si dicesse la grandezza A alla grandezza B hà la stessa ragione, che la grandezza D alla C reciprocamente, vuolsi significare, che i termini della proporzione non vanno disposti come si pronunziano, ma la grandezza D, pronunziata in terzo luogo, và collocata nel quarto, e la grandezza Tav. IX. Fig. III.

C pro-

C pronunziata nel quarto và collocata nel terzo. Brevemente può dirsi così. La proporzion si dice reciproca, quando l'ordine con cui si pronunziano, non è lo stesso, che quello, con cui i termini della proporzion si dispongono; diretta, quando è lo stesso.

Definizione III.

L'altezza di un triangolo, è una linea, che dalla cima dell'angolo opposto alla base, si conduce sulla base perpendicolarmente, come è la linea AP nel triangolo BAC. Tav.IX. Fig. II.

Definizione IV.

Ragion composta di due ragioni è la ragion, che passa tra due grandezze, fra le quali un altra terza se ne frappone, a cui la prima grandezza abbia la prima delle due ragioni, e la quale terza abbia alla seconda la seconda delle date ragioni. Vedi la precedente lezione.

PROPOSIZIONE I.

di Eucl. 1.

I triangoli, e i parallelogrammi, che anno la stessa altezza, o che son chiusi dalle stesse parallele sono in ragion delle lor basi.

Spiegazione.

Siano due triangoli B A C, D F E, che abbian la stessa altezza, o che sian chiusi dentro le stesse parallele B E, A H, dico, i piani, o spazj di tali triangoli B A C, D F E esser nella ragione delle due basi B C, D E, cioè aver quella stessa proporzione, che anno le stesse basi. Può addivenire, che le due basi B C, D E siano commensurabili, e che nol siano. Se sono commensurabili, s' intenda l' una, e l' altra base divisa in quelle parti, che son comune misura, cioè la base B C nelle parti B *a*, *ac*, *cd*, *d* C, e la base D E in altre uguali parti alle prime D *e*, *ef*, *fg*, *gh*, *hi* ec., le quali non lasceranno alcun avanzo, e saranno un certo numero di volte nella D E contenute, per esempio 9 volte; Da ciascun punto della divisione si conducano al vertice altrettante linee *a* A, *c* A ec. *e* F, *f* F. ec. Tav. IX. Fig. IV.

Di-

Dimostrazione del I. Caso delle basi commensurabili.

Quante volte la lineetta D*e* è contenuta nella base B C; tante volte il triangoletto DF*e* è contenuto nel triangolo BAC.

Poichè la linea D*e* è uguale a ciascuna delle lineette B*a*, *ac*, *cd*, *d*C, essendo ciascuna di queste lineette la comun parte. Ondè il triangoletto DF*e* uguaglia ciascuno de' triangoletti BA*a*, *a*A*c* ec. (*a*). Or tanti essendo i triangoletti, quante le lineette, quante volte la D*e* è contenuta nella BC, tante volte il triangoletto DF*e* nel triangolo BAC.

(*a*) *Per la Propos. 20. del 1. El.*

Ma la lineetta D*e* è tal parte aliquota della DE, qual parte è il triangoletto DF*e* dell' intero triangolo DFE.

Poichè la lineetta D*e* uguaglia ciascuna delle altre *ef*, *fg*, *gh*, *hi*, ec. e il triangoletto DF*e* uguaglia ciascun triangoletto *e*F*f*, *f*F*g* ec (*b*), e finalmente tanti sono i triangoletti, quante le lineette. Onde, se la lineetta D*e* sarà per esempio una nona parte di tutta la DE, anche il triangoletto DF*e* sarà una nona parte del triangolo DFE, e se la lineetta sarà una decima, una ventesima, una centesima parte, simil parte decima, ventesima, centesima sarà il triangoletto.

(*b*) *Per la Propos. 20. lib. 1.*

Onde quante volte una parte aliquota della DE è contenuta nella BC, tante volte una simil parte aliquota del triangolo DFE è contenuta nel triangolo BAC, cioè la linea, o base BC stà alla base DE, come il triangolo BAC al triangolo DFE. Lo stesso dee dirsi de' parallelogrammi, che son doppi de' triangoli.

Poichè secondo la lezione del 5 Elemento, allora quattro grandezze son proporzionali, quando il primo conseguente, o una sua qualunque parte aliquota tante volte è contenuto nel primo antecedente, quante il secondo conseguente, o una sua medesima parte aliquota è contenuta nel secondo antecedente.

Caso

Caso II. delle basi incommensurabili.

Che se le basi sieno incommensurabili, si concepisca una parte aliquota della DE sempre minore all' infinito, e si mostrerà, che tal parte aliquota, che all' infinito và sempre scemando tante volte è contenuta nella base B C con qualche avanzo, quante volte un triangoletto, a quella parte aliquota corrispondente sarà contenuto nel triangolo B A C con qualche avanzo, tanti essendo i triangoli, quante le linee. Onde sarà (*c*) B C : D E = △ B A C : △ D F E. Ciò ec. Essendo i parallelogrammi B G, D H doppj degli stessi triangoli (*d*), sarà pure B C : D E = par. B G : par. D H.

(*c*) Per la Lezione del 5.

(*d*) Coroll. 2. della 20. del 1.

Corollario.

Indi siegue, che se due triangoli, o due parallelogrammi anno la stessa base, ma diversa altezza; essi anno fra di loro la stessa proporzion delle altezze. Sopra la stessa, o ugual base A B siano due triangoli A C B, A D B, le cui altezze siano C E, D P, dico essere C E : D P = △ A C B : △ A D B. Poichè si faccia O P uguale a C E, il che si farà tirando C O parallela ad A P, P S = A B, e si conduca la O S.

Tav. IX. Fig. V.

Dimostrazione.

Per la proposizione P O : P D = △ P S O : △ P S D. Ma il triangolo P S O uguaglia il triangolo A B C per essere sù uguali basi P S, A B, e dentro le stesse parallele (*e*), e parimen-

(*e*) Propoſiz. 28. del 1.

rimente il triangolo P S D uguaglia il triangolo A B D (*f*). Onde sarà P O : P D, cioè C E : D P = △ A C B : △ A D B. Ciò ec.

(*f*) Cor. 1. della Prop. 20. del 1.

Essendo i parallelogrammi doppj de' triangoli avranno alle basi la stessa ragion, che anno i triangoli. Ciò ec.

PROPOSIZIONE II.

di Euclide 2.

Se si tira una linea parallela a un lato di un triangolo, essa segherà gli altri due lati proporzionalmente, e se gli sega proporzionalmente, sarà parallela.

Spiegazione.

Tav. IX. Fig. VI. Nel triangolo B A C sia condotta la linea D E parallela al lato B C, dico, essere A D : D B = A E : E C. Poichè si tirino le due linee D C, E B.

Dimostrazione della prima parte.

Sarà per la proposizion 1 A D : D B = △ A E D : △ D E B, cioè al triangolo E D C. Poichè il triangolo D E B è uguale al triangolo E D C. (*a*)

Ma △ A E D : △ E D C = A E : E C (*b*). Onde A D : D B = A E : E C (*c*) Ciò ec.

(*a*) Prop. 20. del 1.
(*b*) Per la Prop. 1.
(*c*) Proposiz. 5. del 5.

Di-

Dimostrazione della seconda parte.

Essendo per l'ipotesi A D : D B = A E : E C, ed essendo A D : D B = △ A E D : △ D E B (*d*), e parimente A E : E C = △ A D E : △ E D C, sarà il triangolo A E D al triangolo D E B, come lo stesso triangolo A D E al triangolo E D C (*e*).

Onde il triangolo D E B = al triangolo E D C (*f*).

Onde le due linee D E, B C son parallele (*g*). Ciò ec.

(*d*) Proposiz. 1.

(*e*) Per la 5. del 5. El.

(*f*) Prop. 3. del 5.

(*g*) Cor. 2. della Prop. 20. del 1. El.

Corollario I.

Indi siegue, che tirandosi più parallele a un lato del triangolo, tutte le porzioni segate de' lati sien proporzionali, cioè, O D : D B = R E : E C. Poichè dal punto O si tiri la O M parallela ad A C. Sarà per la proposizion O D : D B = O N : N M. Ma O N = R E, ed N M = E C (*h*). Onde sarà O D : D B = R E : E C.

(*h*) Prop. 18. del 1.

Corollario II. di Eucl. Prop. 9.

Indi deriva un facilissimo problema. Data una linea qualunque A B si abbia a dividere nella data ragione per esempio della linea X alla linea Z.

Costruzione.

Si faccia A E uguale alla linea X ed E C alla linea Z, e l'angolo B A C sia di qualsisia grandezza. Si congiungano i due punti C, B, e si tiri E D parallela a C B. Dico, esser fatto. Poichè sarà A D : D B = A E,

EC, cioè AB è stata in D divisa nella ragion data di X a Z; che è la ragione di AE ad EC.

Corollario III. di Eucl. Prop. 10.

In somigliante maniera una data linea AB dividesi nella ragione stessa, in cui è divisa un'altra linea *ac*.

Poichè allo stesso modo pongasi a qualunque angolo la AC uguale alla data *ac* in cui sia AE uguale ad *ae*, e facciasi la stessa costruzione, per cui sarà AD : DB = AE : EC, cioè come *ae* : ec.

PROPOSIZIONE III.

di Eucl. 3.

Se una linea, che sega in due parti uguali l'angolo di un triangolo, seghi ancor la base, la segherà proporzionalmente a' due lati, e se segherà la base proporzionalmente a' due lati, segherà l'angolo in due parti uguali.

Spiegazione.

Tav. IX. Fig. VII. L' Angolo BAC sia diviso in due parti uguali dalla AD, che seghi la base BC in due parti BD, DC, dico, essere BD : DC = AB : AC.

Co-

Coſtruzione.

Si faccia la linea A E del lato C A, indefinitamente allungato, uguale ad A B, e ſi congiungano i due punti E, B.

Dimoſtrazione della prima parte.

L'Angolo C A D è uguale all'angolo C E B.

Polchè l'angolo C A D è metà dell'angolo eſterno C A B per ipoteſi. Ma l'angolo eſterno C A B uguaglia i due interni, ed oppoſti A E B, A B E (*a*) i quali ſono uguali tra loro per [(*a*) Propoſiz. 15. del 1.] eſſere la A E uguale alla A B per coſtruzione. Onde l'angolo C A D è uguale all'angolo A E B, cioè C E B.

Onde la A D ſarà parallela alla E B (*b*). [(*b*) Cor. 1. della Prop. 14. del 1.]

Onde ſarà B D : D C = E A : A C (*c*).

Ma E A per coſtruzione uguaglia la B A. [(*c*) Per la Propoſ. 2.]

Onde ſarà B D : D C = A B : A C, Ciò ec.

Dimoſtrazione della ſeconda parte.

Se allo ſteſſo modo ſi faccia A E = A B ſarà per ipoteſi B D : D C = E A : A C.

Onde la linea E B ſarà parallela alla A D (*d*). [(*d*) Seconda parte della Prop. 2.]

Onde l'angolo B E C = all'angolo D A C (*e*) [(*e*) Propoſ. 14. del 1. El.]

Sicchè l'angolo B A D = all'angolo D A C

Polchè l'angolo B A D = all'angolo A B E (*f*); Ma l'angolo A B E = all'angolo B E A (*g*), e l'angolo B E A = all'angolo D A C. Onde l'angolo B A D = all'angolo D A C. Ciò ec. [(*f*) Ivi. (*g*) Propoſ. 5. del 1.]

PROPOSIZIONE IV.

di Euclide 4. *e* 5.

Se due triangoli sono equiangoli, anno i lati scambievolmente proporzionali, e se anno i lati scambievolmente proporzionali, sono equiangoli, e simili.

Prima Parte.

Tav. IX. Fig. VIII. Siano due triangoli BAC, EDF di angoli uguali, dico, essere AB : DE = AC : DF. Parimente AB : DE = BC : EF. Parimente BC : EF = AC : DF. Cioè i lati opposti agli angoli uguali sono proporzionali.

Dimostrazione.

Se si piglia nel maggior triangolo la parte A*e* uguale al lato DE, e la parte A*f* uguale alla parte DF, sarà tutto il triangolo *e*A*f* uguale a tutto il triangolo EDF (*a*), per esser l'angolo D uguale all'angolo A. Onde sarà A*e* : *e*B = A*f* : *f*C (*b*), e invertendo *e*B : *e*A = *f*C : *f*A (*c*). E componendo AB : A*e* = AC : A*f* (*d*), cioè AB : DE = AC : DF. Poichè A*e* = DE, e A*f* = DF. Similmente pigliando la linea B*e* uguale ad ED, e la BO uguale ad EF, si dimostra allo stesso modo essere AB : *e*B = CB : BO, cioè AB : DE = BC : EF. Nè in altra maniera dimostrasi la ter-

(*a*) Propos. 3. del 1.
(*b*) Propos. 2.
(*c*) Cor. della 10 del 5. El.
(*d*) Proposiz. 12. del 5.

terza proporzione B C : E F = A C : D F. Ciò ec.

Seconda Parte.

Siano due triangoli B A C, E D F, ne' quali i lati sieno scambievolmente proporzionali, cioè A B : D E = B C : E F, & B C: E F = A C : D F, & A B : D E = A C : D F, dico gli angoli opposti a' lati proporzionali essere uguali, cioè l'angolo A = all' angolo D, l'angolo B all'angolo E, l'angolo C all'angolo F. Poichè si faccia A *e* uguale a D E, ed A *f* = a D F, e si congiungano i punti *e*, *f*.

Dimostrazione.

Essendo B A : *e* A = C A : *f* A, per esser A *e* = D E, ed A *f*, D F, sarà dividendo B *e* : *e* A = C *f* : *f* A (*e*). Onde le due linee *e f*, B C son parallele (*f*). Onde i due triangoli B A C, *e* A *f* sono equiangoli (*g*). Onde A B : A *e* = B C : *e f*, ed alternando A B : B C = A *e* : *e f*. Ma per l'ipotesi A B : B C = A *e* : E F. Onde *e f* = E F (*h*). Onde ne' due triangoli *e* A *f*, E D F i tre lati uguagliano i tre lati. Onde i tre angoli uguagliano i tre angoli (*i*). Ciò ec.

(*e*) Propos. 11. del 5.
(*f*) Propos. 2.
(*g*) Propos. 14. del 1.
(*h*) Proposiz. 3. del 5.
(*i*) Proposiz. 6. del 1.

Corollario.

Indi si scioglie un facilissimo problema. Date tre linee, trovar la quarta proporzionale.

Costruzione.

Sia la prima linea A *e*, la qual prolongata si faccia *e* B uguale alla seconda, ed *f e* uguale alla terza, la qual faccia un qualun-

que angolo colla AB. Dal punto B si stenda BC parallela ad *ef*, e dal punto A per *f* si tiri una linea, la qual segherà la BC quarta proporzionale alle tre date. Poichè essendo equiangoli i due triangoli *e*A*f*, BAC, sarà A*e* : AB = *ef* : BC.

PROPOSIZIONE V.

di Euclide 6.

Se due triangoli avranno un' angolo uguale a un' angolo, e i lati, che quell' angolo comprendono, proporzionali, saranno equiangoli, o vero simili.

Spiegazione.

Tav.IX. Fig.IX. Sian due triangoli BAC, DEF, ne' quali l'angolo A uguagli l'angolo D, e sia AB: DE = AC : DF, dico, gli altri due angoli ABC, ACB essere uguali agli altri due DEF, DFE.

Costruzione.

Si faccia A*e* uguale a DE, ed A*f* uguale a D*f*, e congiungansi i punti *e*, *f*.

Dimostrazione.

Il triangolo *e*A*f* è equiangolo al triangolo EDF.

(*a*) *Prop.* 3. *del* 1. Poichè essendo due lati, e l'angolo intercetto uguali, sarà l'angolo A*ef* uguale all' angolo DEF, e l'angolo A*fe* all' angolo DFE (*a*).

Ma

Ma il triangolo medeſimo *e* A *f* è equiangolo al triangolo BAC.

Poichè ſarà AB : A*e* = AC : A*f*, eſſendo A*e* = ED, ed A*f* = DF, i quali lati ſon per ipoteſi proporzionali. Onde dividendo ſarà B*e* : *e*A = C*f* : *f*A (*b*). Onde *e f* parallela a BC (*c*). E perciò di angoli uguali (*d*).

Onde il triangolo BAC ſarà equiangolo col triangolo EDF (*e*). Ciò ec.

(*b*) Propoſiz. 11. del 5. El.
(*c*) Propoſ. 2.
(*d*) Propoſiz. 24. del 1.
(*e*) *Aſſiom.* 1.

Corollario.

Si moſtra lo ſteſſo, ſe l'angolo uguale foſſe adjacente ad uno de' due lati proporzionali. Sia dunque l' angolo F uguale all' angolo C, e ſiano AB : DE = AC : DF, dico, il triangolo EDF eſſere equiangolo col triangolo BAC. Poichè come dianzi ſi faccia A*e* uguale a DE, ed A*f* uguale a DF, e conducaſi la *ef*. E' chiaro, che ſarà AB : A*e* = AC : A*f*. Onde *e f* ſarà parallela alla BC (*f*), e l' angolo C uguale all' angolo A*fe*. Ma l' angolo C per ipoteſi uguaglia l' angolo F. Onde l' angolo A*fe* uguaglia l' angolo F. Onde l' angolo A uguaglierà l'angolo D, e l'angolo A*ef* l'angolo E (*g*). Ora eſſendo l' angolo A*ef* uguale all' angolo B, e l' angolo A comune, ſarà il triangolo EDF equiangolo col triangolo BAC.

(*f*) Propoſ. 2.
(*g*) Propoſ. 15. del 1.

PROPOSIZIONE VI.

di Eucl. 8.

Nel triangolo rettangolo la linea, che dall' angolo retto cada sulla base perpendicolarmente, sega il triangolo in due triangoli somiglianti, e fra di loro, e all' intero.

Spiegazione.

Tav. IX. Fig. X. Sia un triangolo rettangolo A B D, e si conduca B P perpendicolare all' ipotenusa A D dico, i due triangoli, che se ne formano B P A, B P D essere somiglianti fra di loro, e ciascuno esser somigliante all' intero A B D. Per dimostrar la somiglianza basterà dimostrare, che essi sono equiangoli.

Dimostrazione.

Il triangolo A B D è equiangolo col triangolo A P B.

Poichè in questi due triangoli un' angolo è retto, e l' angolo B A D è comune ad amendue. Onde tutti tre gli angoli dell' uno uguagliano tutti tre gli angoli dell' altro (*a*).

(*a*) Cor. della 15. del 1. El.

Ma lo stesso triangolo A B D è equiangolo col triangolo B P D.

Poichè gli angoli retti son fra loro uguali, e l' angolo B D P è comune.

Onde i due triangoli A P B, B P D sono equiangoli coll' intero A B D, e ancor fra loro (*b*). Sicchè anno i lati proporzionali (*c*), e sono somiglianti. Ciò ec.

(*b*) Assiom. 1.
(*c*) Prop. 4.

Co-

Corollario I. di Eucl. Prop. 11.

Indi si scioglie questo problema. Date due linee, trovare la terza proporzionale, cioè trovare una terza linea tale, che sia la prima delle due date alla seconda, come la seconda alla terza, che si cerca.

Costruzione.

Sian le due linee AP, PB, le quali se non saranno ad angoli retti, ci si pongano. Al punto B si tiri la perpendicolare alla AB, che congiugne i due punti A, B, la qual perpendicolare in alcun punto D incontrerà la AP prolungata indefinitamente, dico, PD essere la terza proporzionale. Poichè essendo equiangoli i due triangoli BPA, DPB, sarà AP : PB = PB : PD (*d*). (*d*) Propos. 4.

Corollario II. di Eucl. Prop. 13.

Con non maggior difficoltà si scioglie quest' altro problema. Date due linee AP, PD trovare la media proporzionale.

Costruzione.

Le due date linee si pongano per diritto, se nol fossero. La linea AD di amendue composta si divida per metà in C. Col centro C, e raggio CD descrivasi un mezzo cerchio. Al punto P si alzi la perpendicolare alla AD, la qual perpendicolare sarà segata in B dalla circonferenza. Dico, la linea PB essere la media proporzionale. Poichè l'angolo ABD sarà retto (*e*). Onde per la proporzione sarà AP : PB = PB : PD, (*e*) Propos. 14. del 3.

cioè

cioè P B media proporzionale tra le due date A P, P D.

Lo stesso problema si può sciogliere a quest' altra maniera. Sia A D la prima delle date linee, e D P sia l'altra. Si faccia la stessa costruzione di divider la A D per metà in C, e di descrivere il mezzo cerchio, e alzar la perpendicolare P B. Si tiri la B D, dico, B D esser la media proporzionale tra A D, e D P. Poichè essendo equiangoli i due triangoli A B D, B P D, sarà A D : B D = B D : P D. Poichè B D è lato minore del triangolo D B A, ed è ipotenusa del triangolo B P D.

PROPOSIZIONE VII.

di Euclide 14.

I Parallelogrammi, che sono uguali, e che anno un' angolo uguale, anno i lati reciprocamente proporzionali; e se anno i lati reciprocamente proporzionali, sono uguali.

Spiegazione.

Tav.IX. Fig. XI. Sian due parallelogrammi A D, D G uguali, e sia l' angolo B D C uguale all' angolo E D F, dico, essere C D : D E = F D : D B. Si stendano i due lati A B, G E finchè s'incontrino in H.

Di-

Dimostrazione della prima parte.

Il Parallelogrammo A D al parallelogrammo B E stà, come la base C D alla base D E similmente, e per la stessa ragione il parallelogrammo G D al parallelogrammo E B stà come la base F D alla base D B (*a*). Ma i due parallelogrammi A D, G D sono uguali per l' ipotesi. Onde anno al parallelogrammo D H la stessa ragione (*b*). Onde la ragione di C D alla D E è la stessa, che la ragione di F D a D B, cioè C D : D E = F D : D B. Ciò ec.

(*a*) Propos. 1.

(*b*) Proposiz. 1. del 5.

E se anno i lati reciprocamente proporzionali collo stesso angolo uguale, sono uguali.

Dimostrazione della seconda parte.

Essendo C D : D E = F D : D B per ipotesi, sarà il parallelogrammo A D al parallelogrammo B E, come il parallelogrammo G D allo stesso parallelogrammo B E (*c*). Onde il parallelogrammo A D è uguale al parallelogrammo D G (*d*). Ciò ec.

(*c*) Propos. 1.

(*d*) Proposiz. 1. del 5.

Corollario I. di Eucl. Prop. 15.

Che se due triangoli B D C, E D F siano uguali, e abbiano un angolo uguale, avranno i lati, che comprendono gli angoli uguali, reciprocamente proporzionali. La dimostrazione è la stessa. Poichè i due triangoli C B D, E B D stanno in ragion delle basi C D, D E, e gli altri due F E D, B E D stanno come F D, a D B.

Co-

Corollario II.

Indi siegue, che ne' parallelogrammi, e triangoli uguali le altezze siano reciprocamente, come le basi, e se le altezze son reciprocamente come le basi, sono uguali tanto i parallelogrammi che i triangoli. Poichè i due parallelogrammi G D, E B avendo la stessa base D E, son come le due altezze F P, B O (*e*), e i due parallelogrammi A D, B E son come le basi C D, D E (*f*). Essendo uguali que' parallelogrammi sarà C D : D E = F P : B O. Lo stesso si mostra de' triangoli.

(e) Cor. della 1.
(f) Prop. 1.

PROPOSIZIONE VIII.

di Eucl. 16.

Se quattro linee sono proporzionali, sarà il rettangolo formato dalle due estreme uguale al rettangolo formato dalle due medie, e se il rettangolo delle due estreme uguaglierà il rettangolo delle medie, queste linee sono proporzionali.

Spiegazione.

Tav. IX. Fig. XII. Siano quattro linee proporzionali C D : D E = F D : D B. Si formi il rettangolo C B della prima C D nell' ultima D B, e il rettangolo delle due medie D E, D F.

Di-

Dimostrazione della prima parte.

Essendo retti gli angoli in D, ed essendo i lati di questi due rettangoli reciprocamente proporzionali, essi saranno uguali (*a*). Ciò ec. (*a*) Prop. 7.

Dimostrazione della seconda parte.

I due rettangoli AD, DG anno gli angoli uguali, e sono uguali per l'ipotesi. Onde sarà CD: DE :: FD: DB (*b*). Ciò ec. (*b*) Ivi.

Corollario I. di Eucl. 17.

Se le linee proporzionali non saranno quattro, ma tre, il quadrato della media uguaglia il rettangolo delle estreme. Poichè se DE si pone uguale a DF, e siano le tre linee proporzionali CD, DE, DB, sarà CD: DE :: DF: DB. Onde essendo retto l'angolo in D tanto nel quadrato, che nel rettangolo, sarà (*c*) il rettangolo CB uguale al quadrato DG. (*c*) Per la Prop. 7.

Corollario II.

Essendo nel cerchio le linee BP medie proporzionali (*d*) tra i due segmenti AP, PD del diametro AD, saranno tutti i quadrati delle linee BP perpendicolari al diametro uguali al rettangolo corrispondente AP in PD delle parti dello stesso diametro. E ciò da qualunque punto della circonferenza si conduca la perpendicolare al diametro. Tav. IX. Fig. X. (*d*) Prop. 6.

PRO-

PROPOSIZIONE IX.

di Eucl. 18.

Dato un qualunque poligono, e una linea retta descriver sopra di essa un poligono simile al dato.

Sia un qualunque poligono I H G F L, e la data linea A B.

Costruzione.

Fig. XIII. Il dato poligono risolvasi tutto in triangoli L F G, L G H, L I H. Si faccia l'angolo B A C uguale all' angolo G F L, e l' angolo A B D uguale all' angolo F G H, Si faccia F G : A B = L F : C A, e sarà determinata la A C, che è quarta proporzionale alle tre prime date (*a*). Similmente si faccia l'angolo B D E uguale all'angolo G H I, e l' angolo A C E uguale all'angolo F L I. Dico esser descritto il poligono, che resterà chiuso in E dalle due linee D E, C E.

(*a*) Cor. della 6.

Dimostrazione.

Essendo l' angolo A = all' angolo F, e i lati C A, B A proporzionali a' lati L F, G F, il triangolo C A B sarà equiangolo col triangolo L F G (*b*), il lato C B proporzionale al lato L G (*c*), e l' angolo C B D uguale all' angolo L G H. Poichè L G F è stato dimostrato uguale all'angolo C B A, e l' angolo

(*b*) Prop. 5.
(*c*) Prop. 6.

lo A B D per costruzione è uguale all'angolo F G H. Onde essendo i due lati C B, B D proporzionali a' due L G, G H, e l'angolo intercetto C B D uguale all'intercetto L G H, anche questi due triangoli sono equiangoli (*d*). Allo stesso modo dimostrasi il triangolo C E D equiangolo, e di lati proporzionali al triangolo L I H. Onde tutto il poligono E G A B D descritto sulla data A B è equiangolo, e di lati proporzionali a' lati corrispondenti del poligono I L F G H. Cioè tali poligoni sono simili. (*d*) Propos. 5.

PROPOSIZIONE X.

di Eucl. 19.

I triangoli somiglianti stanno fra di loro in ragion duplicata de' lati omologhi, cioè de' lati opposti agli angoli uguali.

Spiegazione.

Sian due triangoli somiglianti A B C, D E F, e si faccia come A C a D F, così D F a C O (*a*), dico, essere △ ABC: △ DEF = AC : CO. Tav. IX. Fig. XIV (*a*) Cor. 2. della Prop. 6.

Dimostrazione.

Essendo somiglianti i triangoli sarà A C : D F = B C : E F (*b*); Ma per l'ipotesi A C : D F = D F : O C; Onde (*c*) sarà B C : E F (*b*) Proposiz. 4. (*c*) Propos. 5. del 5. El.

EF = DF: CO. Essendo l'angolo C uguale all' angolo F, sarà il triangolo BOC uguale al triangolo DEF (d); Onde sarà △ ABC : △ DEF = △ ABC : △ CBO. Ma △ ABC: CBO = AC: CO (e); Onde sarà △ ABC : △ DEF = AC : CO. Ciò ec.

(d) Coroll. 1. della 7.

(e) Propos. 1.

Corollario I. di Eucl. Prop. 20.

Non solamente i triangoli somiglianti, ma eziandio qualunque altra figura, o poligono, sia regolare, sia irregolare, ha ad un altro somigliante poligono la ragion duplicata de' lati omologhi, o frapposti tra angoli uguali. Sia un qualunque poligono ILFGH somigliante a un altro poligono ECABD, dico, il primo poligono essere al secondo in ragion duplicata del lato FG al lato AB. Poichè i due poligoni si risolvano ne' triangoli corrispondenti, cioè il primo ne' triangoli LFG, LGH, LHI, il secondo ne' triangoli CAB, CBD, CDE. Si mostra primieramente il triangolo LFG simile al triangolo CAB. Poichè i due lati LF, FG comprendenti l' angolo F, uguale all' angolo A, sono proporzionali a' lati CA, AB (f). Di poi il secondo triangolo LGH si mostra simile al secondo CBD. Poichè essendo uguali i due angoli LGF, CBA, e uguali ancora per ipotesi gli altri due FGH, ABD, le lor differenze saranno uguali, cioè l' angolo LGH all' angolo CBD. In oltre i due lati GH, GL son proporzionali a' lati BD, BA.

Tav. IX. Fig. XIII.

(f) Propos. 5.

BA. Poichè FG : AB = GL : BC. Ma FG : AB = GH : BD. Onde (g) GL : BC = GH : BD. Collo stesso artifizio mostrasi la somiglianza de' due triangoli LIH, CED, e degli altri, se altri vene fossero. Posta tal somiglianza, il teorema universale si mostra così. Il △ LFG è al triangolo CAB in ragion duplicata di LG a CB, ma anche il △ LGH al △ CBD è in ragion duplicata di LG a CB (h); Onde sarà il triangolo LFG al triangolo CAB, come il △ LGH al △ CBD. Allo stesso modo si mostra essere il △ LGH : △ CBD = △ ILH : △ ECD, e così si mostrerebbe di altri triangoli se ve ne fossero. Onde tutti gli antecedenti LFG, LGH, LIH, cioè il poligono tutto ILFGH, a tutti i conseguenti CAB, CBD : CED, cioè a tutto il poligono ECABD starà come un antecedente (i) LFG a un conseguente CAB. Ma il △ LFG al △ CAB ha la ragion duplicata di FG ad AB. Onde il primo poligono sarà al secondo in ragion duplicata del lato FG al lato AB. Ciò ec.

(g) Per la Proposiz. 5. del 5.
(h) Per la Proposizione.
(i) Proposiz. 6. del 5.

Corollario II.

Nella dimostrazion del Corollario I. s' involgono tutti questi teoremi. 1. I Poligoni somiglianti si posson dividere in triangoli simili, e di ugual numero. 2. Ciascuna coppia di tali somiglianti triangoli sta l' uno all' altro nella stessa ragione, in cui qualunque al-

T tra

tra coppia di somiglianti triangoli. Così △ LFG : △ CAB = LGH : CBD : △ LFG : △ CAB = △ LIH : △ CED, ec. 3. Ciascuna coppia di tali triangoli sta nella stessa ragione, che tutto un poligono a tutto l'altro. 4. Ciascun lato o dello stesso poligono, o de' triangoli, in cui si risolve, sta al suo corrispondente, come qualunque altro al suo. Così LG : IH = CB : ED. 5. Qualunque coppia di triangoli simili sta in ragion duplicata di qualunque lato al suo corrispondente. Così starà △ ILH : △ ECD in ragion duplicata di FG ad AB, o di LG a CB ec. 6. Che tutto un poligono a tutto l' altro sta ancora in ragion duplicata di un qualunque lato, o linea trasversale alla sua corrispondente. 7. Che la somma de' lati di un poligono simile sta alla somma dell'altro, cioè il perimetro dell' uno al perimetro dell' altro, come qualunque lato, o linea trasversale dell' uno al lato, o linea corrispondente, e omologa dell'altro. 8. Che finalmente un poligono simile sia all'altro in ragion duplicata del perimetro dell' uno al perimetro dell' altro.

PROPOSIZIONE XI.

di Eucl. 22.

Se quattro, o più linee sono proporzionali, anche i poligoni somiglianti sopra di esse descritti sono proporzionali.

Spiegazione.

Sian quattro linee EF, GH, IL, MN, o più, e sian sopra di esse descritti poligoni di qualunque maniera, purchè siano o tutti quattro i poligoni somiglianti, o il poligono di ciascuno antecedente somigliante al poligono del suo conseguente. Così se l'antecedente EF forma il quadrato A, il suo conseguente GH formi un altro quadrato B, e se l'antecedente IL forma un triangolo C, anche il suo conseguente MN formi un simil triangolo D; dico, i quattro poligoni A, B, C, D esser proporzionali. Tav. IX. Fig. XV.

Dimostrazione.

Per ipotesi EF : GH = IL : MN. Onde la ragion duplicata di EF a GH è la stessa, che la ragion duplicata di IL ad MN (*a*). Ma (*b*) A : B è nella ragion duplicata di EF a GH, e C : D nella ragion duplicata di IL ad MN. Onde A : B = C : D. Ciò, che ec.

(*a*) Propos. 14. del 5.
(*b*) Proposiz. 10.

PROPOSIZIONE XII.

di Eucl. 23.

I Parallelogrammi di angoli uguali anno fra di loro una ragione composta delle ragioni de' loro lati.

Spiegazione.

Tav.IX. Fig.XVI. Siano due parallelogrammi C B, B G di angoli uguali, e si trovi una linea I M quarta proporzionale delle tre linee D B, B F, B E (a), dico, essere il parallelogrammo C B al parallelogrammo B G come la linea A B alla trovata I M. Poichè stendendo le due linee C D, G E si facciano concorrere in H.

(a) Cor. della 4.

Dimostrazione.

Il Parallelogrammo C B è al parallelogrammo D E, come la base A B alla base B E (b). Similmente il parallelogrammo D E al parallelogrammo B G sta come D B a B F (c); Ma D B : B F = B E : I M per ipotesi. Onde il parallelogrammo D E al parallelogrammo B G starà, come B E ad I M (d). Onde le tre grandezze, o parallelogrammi C B, D E, B G stanno ordinatamente come le tre linee A B, B E, I M. Sicchè sarà il primo parallelogrammo C B al terzo B G, come A B : I M (e). Ciò ec.

(b) Propos. 1.

(c) Ivi.

(d) Propos. 5. del 5.

(e) Propos. 14. del 5.

Co-

Corollario I.

Essendo i triangoli D B A, F B E nella stessa ragion, che i parallelogrammi C B, B G per esser metà di essi, ancor questi due triangoli avranno tra di loro la ragione della linea A B alla linea I M, cioè la ragion composta de' loro lati, cioè, della ragione del lato A B dell'uno al lato B E dell' altro, e del lato D B del primo al lato B F del secondo, la qual composta ragione è quella, che anno le due linee A B, I M (*f*). Onde i triangoli, che anno un solo angolo uguale, sono tra di loro in ragion composta de' lati comprendenti l' angolo uguale. (*f*) Lezione 2.

Corollario II.

E' in oltre manifesto per la proposizione, e pe' corollarj della proposizione 7, che i parallelogrammi, e triangoli, benchè non abbiano alcun angolo uguale sono in ragion composta delle basi, e delle altezze. Onde benchè i due triangoli A D B, E F B non avessero uguale un angolo, pure, pigliando le due altezze D O del primo, F P del secondo, e le due basi A B, B F, e trovando una quarta proporzionale all' altezza D O del primo, all'altezza F P del secondo, e alla base B E del secondo, sarà il primo triangolo A D B al secondo B F E, come la base A B del primo alla quarta proporzionale trovata.

PROPOSIZIONE XIII.

di Eucl. 24.

In ogni parallelogrammo que' parallelogrammi che formansi intorno al diametro sono somiglianti, e fra di loro, e all' intero.

Spiegazione.

Tav.IX. Fig. XVII. Sia un parallelogrammo A D, intorno al cui diametro B E forminsi due, o più parallelogrammi M P, N C, che si formeranno col solo tirare per un qualunque punto O del diametro due linee N P parallela ad A E, ed M C parallela ad A B, dico, i due parallelogrammi M P, N C esser somiglianti all' intero A D, e fra di loro.

Dimostrazione.

I due parallelogrammi M P, N C sono equiangoli, e all' intero A D, e fra di loro.

Poichè i due angoli M E P, N B C sono comuni e all'intero, e a ciascuno de' due parallelogrammi M P, N C (*a*). In oltre l'angolo O P E uguaglia l'angolo B D E (*b*), e l'angolo B D E uguaglia l' opposto A (*c*), e l'angolo A uguaglia l' angolo B N O (*d*). Onde i due parallelogrammi M P, N C, sono equiangoli all' intero, e fra di loro.

Onde sono somiglianti e all' intero, e fra di loro.

Poichè equiangoli saranno i due triangoli, in cui dividesi un parallelogrammo, (*e*) co' due triangoli, in cui dividesi l' altro, e se equiangoli sono i triangoli, i lati di tali triangoli, che son lati de' parallelogrammi saranno proporzionali (*f*). Onde sarà O P : B D = E P : E D, B C : B D = C O : D E, B C : O P = O C : E P. ec. Cioè tali parallelogrammi sono equiangoli, e anno i lati proporzionali e all' intero, e fra di loro, cioè son simili. Ciò ec.

(*a*) Proposiz. 18. del 1.
(*b*) Propos. 14. del 1.
(*c*) Propos. 18. del 1.
(*d*) Propos. 14. del 1.
(*e*) Cor. 1. della Prop. 18. del 1.
(*f*) Propos. 4.

Co-

Corollario di Eucl. Prop. 26.

Se due parallelogrammi N C, A D anno di comune un' angolo N B C, ed anno i lati proporzionali, ſtanno dintorno allo ſteſſo diametro B E, cioè il diametro B O del minore, prolongato paſſa pel punto E. Poichè ſi moſtra facilmente, che in tal ipoteſi ſono equiangoli i due triangoli, in cui eſſi dividenſi. Onde l'angolo O B C è uguale all'angolo E B D, cioè la linea B O prolongata paſſa pel punto E.

PROPOSIZIONE XIV.

di Eucl. 25.

Dati due poligoni formarne un terzo, il qual ſia uguale al primo, e ſomigliante al ſecondo.

Spiegazione.

Sia il primo poligono A di qualunque grandezza, e di quanti lati ſi voglia, o eſſo ſia regolare, o irregolare. Sia un altro poligono B O S F D anch' eſſo a voſtro piacimento e nella grandezza, e nel numero, e ragion de' lati. Si hà a formare un terzo poligono, che ſia uguale al primo A, e ſomigliante al ſecondo B O S F D. Tav. IX. Fig. XVIII.

Costruzione .

Sopra il lato B O si formi il rettangolo B E uguale al secondo poligono B O S F D (*a*); somigliantemente sopra il lato O E si formi un rettangolo uguale al primo poligono A. Dividendo per metà la linea B M in C col raggio C B descrivasi un mezzo cerchio, e prolunghisi il lato E O, finchè in N in qualche punto della circonferenza s' incontri. Dico, la linea O N esser tale, che se sopr' essa si formi un poligono simile al poligono formato sopra la B O, un tal poligono sarà il cercato.

(*a*) Cor. e uso della Prop. 19. del 1.

Dimostrazione .

Il Poligono formato sopra la B O, al poligono simile formato sopra il lato O N sta in ragion duplicata del lato B O al lato O N (*b*).

(*b*) Coroll. 1. della 20.

Ma la linea B O alla O M sta in ragion duplicata della ragion di B O ad O N.

(*c*) Cor. 2. della Prop. 6.

Poichè O N è media proporzionale tra B O, ed O M (*c*).

Onde il poligono fatto sopra la B O al poligono simile fatto sopra la O N starà, come il lato B O alla linea O M, cioè come il rettangolo B E al rettangolo O G (*d*).

(*d*) Propos. 1.

Ma per costruzione il rettangolo B E uguaglia il poligono B O S F D, e il rettangolo O G uguaglia il poligono A.

Onde il poligono sul lato B O a un poligono simile sul lato O N starà come lo stesso po-

poligono ſul lato B O al dato A, cioè il poligono ſul lato O N uguaglia il poligono A, e dall' altra parte ſi ſuppon ſimile al dato B O S F D. Ciò ec.

PROPOSIZIONE XV.

di Euclide 30.

Data una linea diritta ſegarla per modo, che ſia tutta la data ad un ſegmento, come lo ſteſſo ſegmento all' altro.

Sia una linea A C, la qual ſi hà da ſegare per modo in B, che ſi faccia A C : A B = A B : B C. Tav. IX. Fig. XIX.

Coſtruzione.

La data A C ſeghiſi per modo, che il quadrato di A B uguagli il rettangolo di tutta la C A nell' altra porzione C B (*a*), dico eſſer fatto. Poichè (*b*) ſarà in tal caſo A C : A B = A B : B C.

(*a*) Prop. 11. del 2. El.
(*b*) Prop. 7.

Avvertimento.

Che ſe ſi voleſſe un altra coſtruzione per dividere nello ſteſſo modo la data linea C A, eccola. Si alzi perpendicolarmente la C O uguale alla metà di C A, e col centro in O, e raggio O C deſcrivaſi un cerchio, che toccherà la C A. Dal punto A pel centro O ſi con-

conduca la linea AN, che in M incontrerà la circonferenza. Si faccia AB uguale ad AM. Dico la CA esser divisa in B in mezzana, ed estrema ragione (che così i Geometri chiamano una tal sezione). Poichè, essendo CA tangente, sarà il quadrato di CA uguale al rettangolo di MA in AN, cioè al quadrato di MA col rettangolo di AM in MN. Ma MA = BA per costruzione, ed MN = CA. Poichè il raggio CO è metà di CA; onde il quadrato di AC è uguale al quadrato di BA col rettangolo di BA in AC. Ma il quadrato di CA uguaglia (c) i due rettangoli di CB in CA, e di BA in AC. Onde, sottratto il rettangolo di BA in AC, resta il quadrato di BA uguale al rettangolo di BC in CA. Onde CA : BA = BA : BC.

(c) Prop. 3. del 2.



PROPOSIZIONE XVI.

di Eucl. 31.

Se sopra i lati di un triangolo rettangolo si descrivano tre figure somiglianti di quanti lati si voglia, e di qualunque angoli, la figura descritta sull' ipotenusa è uguale alle due, che sopra gli altri due lati si descrivano.

Spiegazione.

Si descriva sopra l' ipotenusa A D un qualunque poligono V, o esso sia regolare, o nol sia, e sopra gli altri due lati BD, BA comprendenti l' angolo retto si descrivano altre due figure somiglianti alla prima Z X; dico la figura V essere uguale alle due insieme Z X. Poichè dall' angolo retto B si faccia cader la B O perpendicolare ad A D. Tav. IX. Fig. XX.

Dimostrazione.

Essendo simili le due figure V, Z saranno fra di loro in ragion duplicata de' lati omologhi A D, D B (*a*). Ma A D a D O è in ragion duplicata de' due lati A D, D B. Poichè (*b*) A D : D B = D B : D O. Onde sarà la figura V alla figura Z come A D alla D O. Similmente mostrasi essere la figura V alla figura X come A D ad A O. Onde sarà la figura V ad amendue insieme le Z, X, come la linea A D alle due A O, O D, cioè, come la A D alla stessa A D, cioè in propor-

(*a*) Cor. della Prop. 10.

(*b*) Per la Prop. 6.

porzion di ugualtà. Onde il poligono V è uguale a' due Z, X. Ciò ec.

Corollario I.

Questa proposizione, con cui si rende universale la proposizione 21 del 1 Elemento, e si applica a qualunque simil poligono, hà luogo anche nel cerchio. Sia la figura V un exagono regolare iscritto nel cerchio, e formato sopra il lato A D. Un simile exagono siano le due figure Z, X. I tre lati A D, B D, B A saranno i tre raggi de' cerchj, a cui sono iscritti (c). Or se dividendo, e suddividendo all'infinito ciascun arco D C, D I, A E, (e lo stesso dicasi di tutti gli altri archi), vadano formandosi prima tre poligoni simili di 12 lati, poi di 24, poi di 48, ec. all' infinito, si verrà a formare tre infiniti poligoni, cioè tre segmenti de' medesimi cerchj, a' quali gli exagoni sono iscritti. I quali segmenti tanto il maggior, che il minore, staranno in ragion duplicata de' lati omologhi. Onde il segmento V sarà per la prop. uguale a' due segmenti Z, X, e per la stessa ragione saranno uguali i complementi di questi segmenti. Onde tutto il cerchio V descritto col raggio A D, che sia l'ipotenusa, uguaglia i due cerchi Z, X descritti l' uno col raggio D B, l'altro col raggio A D.

(c) Cor. 2. della Prop. 4. del 4. El.

Corollario II.

Dalla prop., e dal primo corollario nasce lo scioglimento di questo amplissimo problema

ma. Sian dati quantisivoglia cerchj, trovare un cerchio, che sia uguale a tutti i dati, o vero, dati quantisivoglia poligoni simili trovarne un simile, che uguagli tutti i dati. Sian quattro cerchj A, B, C, D a' quali voglia trovarsene uno uguale. Si formi un' angolo retto P E R. Nel lato E P si faccia la linea E A uguale al raggio del primo cerchio A, e nel lato E R si faccia E B uguale al raggio del secondo B. Si conduca l' ipotenusa A B, la qual se si facesse raggio di un cerchio, questo cerchio uguaglierebbe i due dati A, B. La A B si trasporti in E C, e si pigli E D uguale al raggio del cerchio C l' ipotenusa C D si trasporti in E O, e si faccia E M uguale al raggio del cerchio D. L' ipotenusa O M sarà raggio di un cerchio, che uguaglierà i quattro dati A, B, C, D. Tav. IX. Fig. XXI.

La stessa costruzione si faccia pe' poligoni, ne' quali altro divario non corre, che laddove ne' cerchj vanno adoprati i raggi, ne' poligoni vanno presi i lati omologhi.

PROPOSIZIONE XVII.

di Euclide 32.

Negli ſteſſi, o uguali cerchj gli angoli o al centro, o alla circonferenza anno fra di loro la ragione, che anno gli archi, sù cui poſano, e la ſteſſa ragione anno i ſettori.

Sian due cerchj uguali D E G, LSM, e ſian due qualunque angoli al centro D C G, LIM, dico, l'angolo DCG eſſere all'angolo LIM, come l'arco D *a* G all'arco L *b* M.

Dimoſtrazione della prima parte.

Tav.IX. Fig. XXII. Se ſi concepiſca l' arco D *a* G divideſi, e ſuddividerſi all'infinito, ſi riſolverà in un poligono, che ſempre più ſi accoſterà all'infinito al ſettor circolare DCG, e ſe in ciaſcuna diviſione ſi prenda nell' arco L *b* M tanti archetti uguali agli archetti, in cui l' arco D *a* G ſi divide, queſti archetti formeranno al centro I angoli uguali a quelli, che uguali archetti formano al centro C (*a*). Onde tanti uguali angoli conterrà l' angolo LIM, quanti uguali archi l'arco L *b* M, e ciò indefinitamente. Onde ſarà l'arco D *a* G all'arco L *b* M, come l' angolo DCG all' angolo LIM (*b*). E ciò quanto agli angoli al centro. Ma gli angoli alla circonferenza DEG, L S M ſono come gli angoli al centro eſſendo

(*a*) Propoſ. 12. del 3. El.

(*b*) Definiz. 10. del 5. El.

do metà di essi. Onde gli angoli alla circonferenza DEG, LSM stanno come gli archi D*a*G, L*b*M.

Dimostrazione della seconda parte.

Colla divisione, e suddivisione indefinita dell' arco D *a* G il settore DCG si viene a risolvere in altrettanti piccoli settori, quanti sono gli archetti della divisione; similmente pigliando nell' arco L *b* M tanti archetti, quanti si può uguali agli archetti del primo arco D*a*G, si formeranno altrettanti piccoli settori, quante volte l' archetto entrerà nel grand' arco D*a*G, de' quali settori ciascuno è uguale a' settori del primo arco D*a*G. Onde come stà l'arco D*a*G all' arco L*b*M, così il settore DCG al settore LIM. Ma gli archi sono in ragion degli angoli, onde anche i settori saranno in ragion degli angoli. Ciò ec.

Avvertimento.

La seconda parte di questo teorema può dimostrarsi così.

Se de' due archi D*a*G, L*b*M si formasse la base di due triangoli rettilinei, che abbiano l'altezza medesima GC, o vero LI, questi triangoli saranno come le basi, cioè, come gli archi in linea retta distesi (*c*). Ma questi due triangoli rettilinei son ciascuno uguale al settore, il cui arco anno per sua base. Poichè se la base, così come l' arco si concepisca dividersi indefinitamente, ciascun settore indefinitamente piccolo può riguardarsi

(*c*) Prop. 1.

come

come un triangolo rettilineo, in cui l'altezza è il raggio, e la base è una linea indefinitamente piccola, e indefinitamente vicina all' arco, e ciascun triangoletto indefinitamente piccolo del triangolo rettilineo è uguale al settore indefinitamente piccolo, per avere la stessa altezza, e la stessa base. Onde tutto il settore sarà uguale a tutto il triangolo. Ma i due triangoli rettilinei stan come le basi (*d*), avendo la stessa altezza, e le basi sono uguali agli archi. Onde i settori son in ragion degli archi, cioè degli angoli. Ciò ec.

(*d*) Propos. 1.

Corollario I.

Indi nasce primieramente, che nello stesso cerchio G D E così stà l' arco D *a* G a tutta la circonferenza D E G, come l'angolo D C G a quattro angoli retti.

Corollario II.

Secondariamente, che due archi di diversi cerchj D *a* G, A *d* B, che formino angoli uguali o al centro, o alla circonferenza, sian simili, cioè abbiano ciascuno alla sua circonferenza la stessa ragione. Poichè l'arco D *a* G è alla sua circonferenza D E G, come l'angolo D C G a quattro retti. Similmente sarà l' arco A *d* B alla sua circonferenza A O B, come l' angolo A C B a quattro retti. Ma l'angolo D C G è per ipotesi uguale all'angolo A C B, e quattro angoli retti uguagliano altri quattro angoli retti. Onde (*e*) sarà l'ar-

(*e*) Proposiz. 5. del 5. El.

l' arco D *a* G alla sua periferia come l' arco A *d* B alla sua, cioè tali archi sono somiglianti.

PROPOSIZIONE XVIII.

I Settori di due diversi cerchj, che formano al centro angoli uguali, sono in ragion duplicata de' semidiametri, e i settori di diversi cerchj, che formano diversi angoli sono in ragion composta de' semidiametri, e degli archj che formano.

Questa proposizione co' suoi corollarj, e col corollario generale io hò aggiunto agli Elementi, perchè essa è di estrema necessità in tutte le parti della Matematica, e non è meno propria di questo Elemento, che sian tutte le altre.

Prima Parte.

Sian dunque in primo luogo due settori A C B, D C G, che facciano l' angolo stesso. Dico, essi aver tra di loro la ragion duplicata de' raggi, o semidiametri A C, D C. Tav. IX. Fig. XXII.

Dimostrazione.

Il settore A C B è uguale a un triangolo, che abbia di altezza il raggio C A, e di base una linea diritta uguale all' arco A *d* B (*a*); similmente il settore D C G è uguale a un triangolo, che abbia di altezza il raggio D C, e di base una retta uguale all' arco D *a* G.

(*a*) *Avvert. della Prop. 17.*

V Onde

Onde un settor sarà all'altro, come un triangolo all' altro, ma i triangoli stanno in ragion composta delle basi, e delle altezze (*b*). Onde tali triangoli sono in ragion composta de' semidiametri, che fanno le altezze, e degli archi che somministran le basi. Ma essendo gli angoli uguali, gli archi sono in ragion delle stesse altezze, o raggj (*c*). Onde i triangoli saranno in ragion duplicata o delle altezze, cioè de' raggj, o anche delle basi, cioè degli archi. Ciò ec.

(*b*) Cor. 1 della Prop. 12.

(*c*) Propos. 17.

Seconda Parte.

Che se i settori formassero diversi angoli, e fosser di cerchj diversi, come sono i due settori L I M, A C B, saranno in ragion composta della ragion de' raggj L I, C A, e degli archi L *b* M, A *d* B. Poichè il settore L I M è uguale a un triangolo rettilineo, in cui L I sia l' altezza, e una retta uguale all' arco L*b*M sia la base, e il settore A C B è uguale a un altro triangolo, in cui C A sia l' altezza, e una retta uguale all'arco A*d*B sia la base. Ma tali triangoli sono in ragion composta delle altezze, e delle basi (*d*). Onde i settori saranno in ragion composta de' raggj, e degli archi. Ciò ec.

(*d*) Cor. 2. della Prop. 12.

Corollario I.

Indi deriva questo teorema. Due diversi cerchj stanno in ragion duplicata de' loro raggj, o di due linee, o corde che seghino archi simili. Poichè il settore A C B stà al settore D C G come tutto il cerchio A O B a tutto

tutto il cerchio D E G; Ma il settore A C B è al settore D C G in ragion duplicata de' raggj A C, D C (*e*), e i raggj A C, D C, (*e*) *Per la Proposiz.* o la lor ragion duplicata sono come le corde A B, D G, o la lor ragion duplicata; Onde il cerchio intero A O B sarà all'intero D E G in ragion duplicata de' raggj A C, D C, e delle corde simili A B, D G, cioè delle corde, che segano archi somiglianti.

Corollario II.

Indi ancor nasce questo secondo teorema. Due segmenti simili circolari sono in ragion duplicata delle corde, che li segano. Sian due simili archi A *m* O, D *n* E, i due segmenti A O *m*, D E *n* saranno pur simili, dico, tali segmenti essere in ragion duplicata delle due simili corde A O, D E. Poichè la ragion duplicata delle due linee A O, D E ed è uguale alla ragione de' due triangoli A C O, D C E (*f*), ed è uguale alla ragione de' due (*f*) *Prepos. 10.* settori A C O *m* A, D C E *n* D (*g*). Onde il (*g*) *Coroll. 1.* settore A *m* O C sarà al settore D *n* E C come il triangolo A C O al triangolo D C E. Ed alternando, il settore A *m* O C, al triangolo A C O come il settore D *n* E C al triangolo D C E. E dividendo, il segmento A *m* O A al triangolo A C O, come il segmento D *n* E D, al △ D C E. Ed essendo i due triangoli in ragion duplicata de' lati A O, D E, alternando verrà un segmento all' altro in ragion duplicata delle corde A O, D E, che li segano.

Corollario Generale.

I cerchj, e tutte le figure somiglianti son tra di loro, come i quadrati de' loro raggj, o de' loro lati omologhi.

Dimostrazione pe' Cerchj.

I Cerchj sono in ragion duplicata de' loro raggj (*b*); Ma i quadrati, che sopra tali raggj si formano, essendo poligoni simili, sono in ragion duplicata degli stessi raggj (*i*). Onde i cerchj sono in ragion de' quadrati de' raggj loro (*k*). Ciò ec.

(*b*) Cor. 1. della Prop. 18.

(*i*) Cor. 1. della Prop. 10.

(*k*) Proposiz. 5. del 5. El.

Dimostrazione per tutte le figure simili.

Le figure simili stanno in ragion duplicata de' lati omologhi (*l*); Ma anche i quadrati, che sopra i lati omologhi si formano son figure simili. Onde tali quadrati anno la stessa ragion fra di loro, che anno tutte le altre figure, o poligoni somiglianti tra di loro. Ciò ec.

(*l*) Cor. 1. della Prop. 18.

Fine de' sei Elementi di Geometria.

IN-

INDICE

DE' VOCABOLI

Latinamente usati nella materia delle Proporzioni; e loro esposizione.

volta, e mezza, una volta, e una terza, una volta, e una quarta, ec. come 3 : 2 è in ragion sesquialtera, per essere il 2 contenuto nel tre $1\frac{1}{2}$. *Ma* 4 : 3 *è in ragion sesquitertia, per esser contenuto* $1\frac{1}{3}$. *il* 5 : 4 *in ragion sesquiquarta per esser contenuto* $1\frac{1}{4}$, *ec.*

Ratio subsuperparticularis *è la proporzion del minore al maggiore nel quale il minore sia contenuto una volta, con di più una sua parte aliquota.*

Ratio subsesquialtera, subsesquitertia, *ec. è la proporzion del minore, al maggiore, nel quale il minore si contenga una volta, e mezza, una volta, e un terzo, ec. Così* 2 : 3 *è ragion subsesquialtera, poichè vi è contenuto* $1\frac{1}{2}$; 3 : 4 *è subsesquitertia per esser contenuto* $1\frac{1}{3}$. *ec.*

Ratio superpartiens *è la proporzione del maggiore al minore, il qual nel maggior sia contenuto una volta, e di più alcune sue parti aliquote.*

Ratio superbipartiens tertias, supertripartiens quartas, superquadripartiens nonas, *ec. è la proporzione del maggiore al minore, il qual nel maggior sia contenuto una volta, e due terze parti, o una volta e tre parti quarte, o una volta, e quattro parti none, ec. Così il* 5 : 3 *è in ragione*

ne superbipartiente tertias *Poichè il denominator della ragione è* $1\frac{2}{3}$. *il* 7 : 4 *è in ragione* supertripartiente quartas *Poichè il denominator della ragione è* $1\frac{3}{4}$. *il* 13 : 9 *è in ragione* superquadripartiente nonas *Poichè il denominator sarà* $1\frac{4}{9}$. *ec.*

Ratio subsuperpartiens *è la ragione del minore al maggiore, nel quale il minore sia contenuto una volta, e alcune sue parti aliquote.*

Ratio subsuperbipartiens tertias, subsupertripartiens quartas, subsuperquadripartiens nonas, *ec. è la ragione del minore al maggiore, nel quale il minor sia contenuto una volta, più* $\frac{2}{3}$, *o più* $\frac{3}{4}$ *o più* $\frac{4}{9}$, *ec. Così* 3 : 5 *è contenuto* $1 + \frac{2}{3}$, 4 : 7 *è contenuto* $1 + \frac{3}{4}$, 9 : 13 *è contenuto* $1 + \frac{4}{9}$, *ec.*

Ratio multiplex superparticularis *è la proporzion del maggiore al minore, il qual nel maggiore è contenuto alcune volte, con una sua parte aliquota.*

Ratio dupla, tripla, quadrupla, ec. sesquialtera *è la proporzion del maggiore al minore, il quale due volte e* $\frac{1}{2}$, *o ver tre volte e* $\frac{1}{2}$, *o vero quattro volte, e* $\frac{1}{2}$ *è contenuto nel maggiore. Così* 5 : 2 *è ragion*

dupla ſeſquialtera. *Poichè l' eſponente è* $2\frac{1}{2}$. 7 : 2 *è ragion* tripla ſeſquialtera. *Poichè l' eſponente è* $3\frac{1}{2}$. 9 : 2 *è ragion* quadrupla ſeſquialtera. *Poichè l' eſponente è* $4\frac{1}{2}$, *ec.*

Ratio dupla, tripla, ec. ſeſquitertia, ſeſquiquarta, *ec. è la proporzion del maggiore al minore, il quale due, tre volte, ec. con di più* $\frac{1}{3}$, *o* $\frac{1}{4}$, *ec. è contenuto nel maggiore. Così* 10 : 3 *è in ragion* tripla ſeſquitertia. *Poichè il denominatore è* $3\frac{1}{3}$. 13 : 4 *è ragion* tripla ſeſquiquarta. *Poichè il denominatore è* $3\frac{1}{4}$.

Ratio ſubdupla, ſubtripla, ec. ſubſeſquitertia, ſubſeſquiquarta, *ec. è la proporzione del minore al maggiore, nel quale il minore ſia contenuto più di una volta, con di più una terza, una quarta, ec. Così* 3 : 7 *è ragion* ſubdupla ſubſeſquitertia. *Poichè il* 3 *vi è contenuto* $2\frac{1}{3}$. 4 : 13 *è ragion* ſubtripla ſubſeſquiquarta. *Poichè il* 4 *vi è contenuto* $3\frac{1}{4}$.

Ratio multiplex ſuperpartiens *è la proporzion del maggiore al minore, il qual ſia nel maggior contenuto più volte, e di più alcune parti aliquote.*

Ratio dupla, tripla, ec., ſuperbipartiens, ſupertripartiens, tertias, quartas, ſeptimas,

mas, *ec. è la proporzion del maggiore al minore, il quale sia nel maggior contenuto due volte e* $\frac{2}{3}$, *o* $\frac{2}{4}$ *o vero* $\frac{2}{7}$. *Così* 8 : 3 *è ragion* dupla superbipartiens tertias. *Poichè il denominator sarà* $2\frac{2}{3}$. 14 : 4 *è ragion* triplasuperbipartiens quartas. *Poichè il denominator sarà* $3\frac{2}{4}$. 16 : 7 *è ragion* dupla superbipartiens septimas. *Poichè il denominator sarà* $2\frac{2}{7}$. 18 : 5 *è ragion* tripla supertripartiens quintas. *Poichè il denominator sarà* $3\frac{3}{5}$.

Ratio subdupla, subtripla, ec. subsuperbipartiens, subsupertripartiens, ec. tertias, quartas, *ec. è la proporzion di un minore al maggiore, nel quale il minor sia contenuto più di una volta, con più di una parte aliquota qualunque. Così* 3 : 8 *è ragion* subdupla subsuperbipartiens tertias: Poichè il quoto $2\frac{2}{3}$. 4 : 14 *è ragion* subtripla subsuperbipartiens quartas. *Poichè il quoto sarà* $3\frac{2}{4}$. 5 : 18 *è ragion* subtripla subsupertripartiens quintas. *Poichè il quoto sarà* $3\frac{3}{5}$.

Ratio duplicata, triplicata, quadruplicata, ec. alterius rationis *è la proporzione, che passa tra la prima, ed ultima di tre, quattro, cinque grandezze, ec., che sien continuamente proporzionali nella ragion data.*

ta. Così il 2 : 32 hà ragion quadruplicata della ragione del 2 : 4. Poichè questi termini 2, 4, 8, 16, 32, son continuamente proporzionali, secondo la proporzion di 2 : 4.



USI

USI DEL SESTO ELEMENTO.

Uso della Prop. I.

Teorema I. Fisico Astronomico.

Ciascuna delle proposizioni di questo Elemento ha tali, e tanti usi in tutte le parti della Matematica, e della Fisica, che difficil cosa è lo sciegliere tra l'uno, e l'altro uso. Noi quegli usi scieglieremo, che sono più facili, ed alla studiosa gioventù più vantaggiosi. La prima proposizione ci somministra questo ampissimo teorema. Se un pianeta sia spinto con due velocità, la prima, che sia istantanea secondo qualunque direzione, e la seconda, che sia continua, e successiva, e sia diretta verso un centro di forze, come è appunto l' universal gravità, un tal pianeta scorrerà per una curva concava verso il centro, nella quale gli spazj descritti dalla retta, che congiugne il pianeta col centro, sono proporzionali a' tempi.

Sia per esempio in T la terra, in B la luna, la qual secondo qualunque direzione sia istantaneamente spinta, e con direzione verso il centro terrestre sia portata dalla sua gravità con azion perpetua, e successiva, dico, Tav. X. Fig. I.

co, la luna scorrere per una curva B A D N P M concava verso la terra T, e gli spazj B T A O, B T P M, o altri sieguono la ragion de' tempi, in cui essa li descrive. La prima parte di questo teorema è stata dimostrata nell' uso della proposizion 19 del 1 Elemento, nel quale ancora è stato mostrato, che un tal pianeta in tempi uguali scorre spazj uguali. Il che premesso, dimostrerò così il proposto teorema. Si concepisca coll' animo (giacchè agli occhi difficilmente può rappresentarsi) tutta la figura A B M P N D S dividersi in settori, o spazj indefinitamente piccoli, e fra loro uguali, per esempio *d* T *g*, *g* T *m*, *m* T *n*, *n* T *p*, ec., i quali settori abbiano la cima in T, e la base in qualche porzione della curva *d g*, *g m*, *m n*, ec. Or tali porzioni, essendo indefinitamente piccole, posson passare come linee diritte; Onde i settori già detti saranno tanti piccolissimi triangoli rettilinei *d* T *g*, *g* T *m*, ec., i quali, essendo uguali per ipotesi, saranno descritti in tempi uguali (*a*). Sicchè il primo tempuscolo stà a tre, cinque, mille, un milion di uguali tempuscoli, come il primo triangoletto, a tre, a cinque, a mille, a un milion di uguali triangoletti, cioè (*b*) i tempi anno la ragion de triangoli, o de settori, che in tali tempi si scorrono. Onde se in 8 giorni la luna avrà descritto il settore P T B, che di tali triangoli è composto, e indi scorreranno altri 6 giorni, la luna si troverà dopo tali 6 giorni nel

(*a*) Per l'uso della Prop. 19. del 1. El.

(*b*) Per la Proposizione.

nel punto A per modo, che il ſettore A T B, ſtia al ſettore P T B, come ſtà 6 all' 8, o il 3 al 4. Ciò ec. Lo ſteſſo dicaſi e della terra intorno al ſole nell'ipoteſi Copernicana, e de' Satelliti di Giove, e di Saturno riſpetto a loro primarj, lo ſteſſo di Mercurio, Venere, Marte, Giove, e Saturno intorno al ſole, che è centro delle loro rivoluzioni.

Teorema II.

Indi naſce queſto ſecondo teorema: Il tempo periodico di un pianeta ſta a qualunque altro tempo, come tutta l'area dell'orbita dello ſteſſo pianeta alla porzion, che ſega nel dato tempo.

Il tempo periodico altro non è, che il tempo, che conſuma un pianeta qualunque, per eſempio la luna, a traſcorrere tutta la ſua orbita A M N D. Onde ſarà nel primo teorema un tal tempo a tutta l'aja della figura A M P N, come qualunque altro tempo al ſuo ſettore.

Eſempio.

Sia B la luna, la quale in ſei giorni $5^{h}.\ 25'$ ſcorra il ſettore A T B. L'orbita lunare intera A M N D ſuppongaſi diviſa in 100000 ſettori uguali. Secondo il Keplero una tal orbita traſcorre la luna in $27^{d}.\ 7^{h}.\ 43'.\ 5''.\ 8'''.$ Onde ſaranno $27^{d}.\ 7^{h}.\ 43'.\ 5''.\ 8''' : 6^{d}.\ 5^{h}.\ 25' =$ 100000. al quarto proporzionale, che rappreſenterà il ſettore A T B.

Uſo

Uso Primo della Propofiz. II.

Con quefta propofizione fi può fpiegar nella Fifica, che i pefi de' corpi fono in ragione delle loro maffe, cioè della quantità della materia, che effi contengono.

Tav. X. Fig. II. Siano adunque due corpi Z, X, e la maffa del corpo Z, o la quantità della materia, che effo fotto il fuo volume contiene, fia rapprefentata dalla linea A M, e la maffa del corpo X fia rapprefentata dalla linea M O. Onde farà la maffa del corpo Z alla maffa del corpo X, come la linea A M alla linea M O. Or dico effere il pefo del corpo Z al pefo del corpo X, come la linea A M alla linea M O, cioè come la maffa del primo alla maffa del fecondo.

Concepite primieramente il corpo Z divifo indefinitamente in globetti, o particelle in qualunque modo fra loro uguali, ciafcuna delle quali fia indefinitamente piccola. Similmente concepifcafi la linea A M divifa in parti indefinitamente piccole AB, BC, CD, ec. Ciafcuna di quefte particelle rapprefenterà l' Elemento della maffa, cioè uno di que' globetti indefinitamente piccoli. Parimente tanto la maffa X, quanto la linea M O fi concepifcan divife, quella in globetti piccoliffimi uguali a globetti del corpo Z, quefta in lineette piccoliffime uguali alle lineette A B, B C, ec.

Indi conducendo la linea A P, che faccia qua-

qualunque angolo O A P, e di qualunque lunghezza, congiugnete i punti O, P per la linea O P, e tirate la M N parallela alla O P. Similmente a' punti B, C, D, ec. conducete le B E, C F, ec. parallele alla stessa O P. Si dimostra per la proposizione, che le lineette A E, E F, F G, ec. sono fra loro uguali. Poichè essendo parallele le linee B E, C F, D G, ec. sarà A B : A E = B C : E F. ed alternando A B : B C = A E : E F. Onde essendo A B uguale alla B C, sarà la A E uguale alla E F, e similmente delle altre F G, G I, ec. Sicchè potendo voi per la lineetta A E rappresentare il peso di uno di que' piccolissimi globetti, che chiamasi l' Elemento del peso, la lineetta E F rappresenterà il peso del secondo, la F G del terzo, e così all' infinito. Poichè globetti di ugual massa sono di peso uguale. Sicchè tutta la linea finita A N rappresenterà il peso del corpo Z. Con raziocinio somigliante dimostrasi, che la linea N P rappresenterà il peso del corpo X. Onde sarà A N alla N P, come il peso del corpo Z al peso del corpo X. Ma (*a*) A N : N P = A M : M O, e per ipotesi A M : M O, come la massa di Z alla massa di X. Onde sarà la massa di Z alla massa di X, come il peso di Z al peso di X, cioè i pesi sono come le masse.

(*a*) Per la Prop.

Questa proposizion fisica, come voi vedete, si appoggia sul teorema geometrico spiegato, e sù un assioma fisico, cioè, che

con-

corpicelli di ugual materia pesino ugualmente.

Uso secondo della Prop. II.

Teorema Matematico = fisico.

Un qualunque continuo può indefinitamente dividersi, cioè, non può pervenirsi ad una divisione, di cui non si possa dimostrare, essa non esser l'ultima.

Tav. X. Fig. III. Sia la linea A B un qualunque continuo, cioè o un corpo, o un tempo, o una forza, o una velocità finita, e continua, e si supponga divisa nelle sue ultime parti, le quali siano B*a*, *ab*, *bc*, *cd*, *de*, ec., dico, essa linea esser divisibile in parti minori all'infinito. Poichè dal punto A si conduca la linea AC, la qual faccia qualunque angolo, e sia minore della linea AB si congiungano i due punti B, C, e da ciascun punto *a*, *b*, *c*, *d*, ec. delle ultime divisioni si conducan delle linee parallele alla B C, le quali linee essendo parallele, e tirate da diversi punti non coincideranno fra loro, queste parallele segheranno nella minore AC altrettante lineette, quante sono le parti ultimamente divisibili nella AB, dico, ciascuna di tali parti esser minore delle parti della A B, onde le parti della AB erano ulteriormente divisibili. Imperochè essendo *ab* parallela a BC; sarà (*a*) A*a* : *a*B = A*b*: *b*C. E componendo AB : *ab* = AC: *b*C, ed alternando AB: AC =

(*a*) Per la Proposiz.

ab:

ab : *b*C. Ma A C per ipotesi è minore di A B; onde anche *b*C sarà minore di *a* B. Onde la parte *a*B potea farsi minore. Onde non è ultimamente divisibile, come supponevasi. Lo stesso dimostrasi delle altre parti *ab*, *bc*, ec.

Che se la parte *b*C si volesse ultimamente divisibile, si potrà pigliare una linea AD minore di AC e dimostrare allo stesso modo la parte *b*C non essere ultimo divisibile. Similmente pigliando A E minor AD dimostrasi le parti, in cui resta divisa la AD potersi ulteriormente dividere, e così indefinitamente. Onde qualunque continuo è indefinitamente divisibile.

Uso della Prop. IV.

Problema Astronomico.

Dati i due diametri del sole, e della terra, e la distanza del sole dalla stessa terra, trovare la lunghezza del cono ombroso della terra. Sia CHA il sole, e sia in T la terra; le due linee AB, CD, che sono comuni tangenti del sole in A, e in C, e della terra in O, e in P, formeranno un triangolo ombroso PBO. Se si tira pe' due centri la linea ST, essa passerà pel punto B. Se il triangolo PBO si concepisce girare intorno a questa linea TB, formerà un cono ombroso, cioè un cono, a cui non Tav. X. Fig. IV.

X giu-

giugne la luce diretta del sole; si dee trovare la lunghezza TB di questo cono.

Soluzione.

Si cerchi la quarta porzionale dopo la differenza de' due semidiametri del sole; e della terra (*a*), tra il semidiametro della terra, e la distanza del sole dalla terra, dico, questa quarta proporzionale essere la lunghezza cercata del cono ombroso della terra.

(*a*) Cor. della Prop. 4.

Dimostrazione.

Da' due centri S del sole, T della terra si tiri due linee SA, TO a' due punti A, O del contatto, le quali saranno alla linea AB perpendicolari. Dal punto O si conduca la linea OI parallela ad SB. E' manifesto essere equiangoli i due triangoli OIA, BTO. Poichè oltre ad essere rettangoli in A; & O; i due angoli IOA; TBO sono uguali, per esser IO parallela ad SB. Onde (*b*) i lati omologi sono proporzionali, cioè IA : TO = IO : TB. Ma la linea IA è la differenza de' semidiametri terrestre, e solare, per esser SI = TO; la linea TO è il terrestre semidiametro, e la linea IO essendo uguale ad ST è la distanza del sole dalla terra. Onde la lunghezza TB del cono ombroso è a' tre termini sopradetti quarta proporzionale.

(*b*) Per la Prof.

Che

Che se P O sia la luna, e si abbia a cercare la lunghezza del cono ombroso, che essa gitta nella parte avversa al sole, si troverà allo stesso modo, facendo, come la differenza de' semidiametri solare, e lunare al semidiametro lunare, così la distanza del sole dalla luna al quarto termine, che sarà la lunghezza del Cono.

Esempio del Cono Ombroso Lunare.

Si abbia a trovare il cono ombroso lunare massimo de' novilunj, cioè qual cono, che la luna ne' novilunj gitterà nella sua massima distanza dal sole. Allora la luna sarà nella sua massima distanza dal sole, quando trovandosi questo nella sua massima distanza dalla terra, la luna trovasi nella massima vicinanza alla stessa terra.

Posta dunque la media distanza del sole dalla terra di	20000 semidiametri terrestri,
sarà la sua massima distanza di	20337 semidiametri terrestri.
La massima vicinanza della luna alla terra si fa di	55 semidiametri terrestri.
Onde la massima distanza della luna dal sole sarà di	20282 semidiametri terrestri.

Se il semidiame-

tro lunare ponga-
si di $\frac{27}{100}$ del semidiam.terrestre.
Ed il solare di 94 semidiametri terrestri, come i più moderni Astronomi anno determinato, sarà il semidiametro solare, al semidiametro lunare come 94 a $\frac{27}{100}$, cioè come 9400 a 27. Onde la differenza de' due semidiametri sarà al semidiametro lunare come 9373 a 27. Onde sarà 9373 : 27 = 20282 : 58 + $\frac{3980}{9373}$. Sicchè il massimo Cono ombroso lunare, che cerchiamo, sarà di 58 semidiametri terrestri, e $\frac{39}{93}$ prossimamente.

Dalle cose fin quì dette si deduce, che l' eclissi solare, benchè sia centrale, può esser totale, e può non esserlo. Allora si vedrà e centrale e totale, quando la distanza dell'occhio dalla luna sarà o minore, o uguale all'altezza del cono ombroso lunare. Se sarà minore, l' eclissi sarà totale con qualche dimora, e se sarà puramente uguale, l' eclissi sarà totale senza dimora. Il caso più favorevole per gli eclissi solari è quello appunto, che ho addotto nell'esempio, cioè quando si combinano queste tre cose. 1°. che l' eclissi sia centrale, 2°. che il sole trovisi nella massima distanza della terra, 3°. che la luna in quel novilunio trovisi nella minima distanza. Per la mancanza di questa terza condizione l' eclissi solar di quest' anno 1748, quantunque rispetto a Cracovia, e a tutti

tutti que' luoghi terreſtri, che ſi incontrano in una curva, che ſi deſcrive nel globo terreſtre, ſia ſtato centrale; e quantunque il ſole ſiaſi trovato aſſai proſſimo alla ſua maſſima diſtanza, pure trovandoſi la luna in diſtanza della terra di 63 ſemidiametri terreſtri ſecondo le tavole di Filippo de la Hire, l' ecliſſi è ſtato oſſervato anulare, e non già totale; come ſarebbe ſtato oſſervato, ſe la diſtanza lunar dalla terra foſſe ſtata di 58 ſemidiametri terreſtri, e molto più ſe foſſe ſtata minore.

La diſtanza lunare media della terra ſecondo le Ipoteſi di queſto calcolo torna di

circa	59 ſemidiametri terreſtri,
la maſſima di	63
e la minima, come è ſtato detto, di	55

Ma convien avvertire, che io mi ſon ſervito di tali diſtanze, non già perchè ſieno accuratamente tali, ma per isfuggire il tedio delle frazioni. Del reſto, chi voleſſe ſeguire le parallaſſi lunari Orizzontali delle tavole Caſſiniane, potrebbe adoperare la maſſima diſtanza di

ſemidiametri terreſtri	$63 + \frac{46}{158}$,
e la minima di	$55 + \frac{560}{180}$.
On la media ſarebbe di ſemidiametri terreſtri	$59 + \frac{85}{282}$.

Uso della Prop. VI.

Teorema Meccanico = Fisico.

Questa semplice proposizione Elementare somministra un teorema fondamentale nella meccanica, e specialmente in quella parte di essa, dove si tratta delle forze centrifughe. Forza centrifuga altro non è, che una forza, per cui un corpo si sforza di allontanarsi dal centro della sua rivoluzione. Che tali forze siano nella natura apertamente si mostra con un ovvio sperimento di una fionda. Poichè se una mano avvolga se stessa,
Tav. X. Fig. V. e una fionda CA intorno al centro C, e faccia descriver per aria al corpo A il cerchio ADME, essa sentirà trarsi dal corpo A in ogni istante, e ciò tanto più, quanto maggiore è la velocità del corpo A, che intorno si ravvolge. Sicchè se la mano non fa forza per rimanere in C, dalla fionda è portata a scostarsene ogni momento. Questa dunque sarà una forza, che fa il corpo per discostar se, e ciò, che a lui si congiugne dal centro del suo avvolgimento, cioè sarà una forza centrifuga.

Or la misura di una tal forza centrifuga si determina (*a*) così. La forza centrifuga è terza proporzionale tra il diametro del cerchio, che il corpo descrive, e un arco infinitamente piccolo, che esso descrive in un tempo infinitamente piccolo.

(*a*) Per la Proposiz.

Sia

Sia dunque DO un arco infinitamente piccolo, che il corpo, mentre scorre il suo cerchio, descriverà in un tempo infinitamente piccolo. Si tiri dal centro la linea CO, che indefinitamente si stenda. Dal punto D si tiri il diametro DE, e dal punto E la linea EO. Se il corpo nell' istante, che giugne in D fosse abbandonato, scorrerebbe per la tangente DS, e la linea OS sarebbe il suo scostamento dal centro C, cioè la misura della forza centrifuga. Or essendo l' angolo SCD infinitamente piccolo, poichè l'arco DO è infinitamente piccolo, le due linee SC, DC saran parallele. Onde tirando dal punto O la linea OV perpendicolare al diametro, sarà DV = SO, cioè, DV esprimerà la forza centrifuga, come la esprime la SO. Tirando la linea DO sarà (a) DE : DO = DO : DV. Onde la misura della forza centrifuga sarà terza proporzionale del diametro, e della corda dell' arco infinitamente piccolo. Ma la corda dell' arco infinitamente piccolo, è uguale all' arco stesso. Onde la forza centrifuga sarà terza proporzionale del diametro del cerchio, e dell' arco infinitamente piccolo, che il corpo descrive. Ciò ec.

(a) Per la Proposizione.

Uso della Prop. VIII.

Teorema Meccanico = Fisico.

La forza centrifuga di un corpo è uguale al quadrato di un arco infinitamente piccolo diviso pel diametro del cerchio, intorno a cui il corpo rivolgesi.

Sia come nell' uso della Proposizione sesta DO un arco infinitamente piccolo, che il corpo descrive in un tempo pure infinitamente piccolo. Abbiam dimostrato nell' uso precedente essere il diametro DE all' arco DO, che colla sua corda si confonde, come l' arco stesso DO alla forza centrifuga DV. Onde (*a*) sarà il quadrato della corda DO uguale al rettangolo del diametro DE nella forza centrifuga DV. Dunque dividendo tanto il quadrato dell' arco DO, quanto il rettangolo del diametro nella forza centrifuga per lo stesso diametro, i due quozienti saranno uguali. Poichè se due quantità uguali si dividono per la stessa quantità, lasciano uguali quozienti. Ma se il rettangolo del diametro nella forza centrifuga si divide pel diametro, resta la forza sola centrifuga. Poichè è lo stesso moltiplicare, e poi dividere una quantità per un' altra quantità, che lasciarla senza moltiplicazione, e divisione, dando la moltiplicazione ciò, che toglie la divisione. Onde la forza centrifuga resterà uguale al quadrato dell' arco diviso pel diame-

Tav. X. Fig. V.

(*a*) *Pel Cor. della Prop.*

me-

metro del cerchio, intorno a cui il corpo si aggira.

Sulla presente Proposizione, e sulle ragioni recate nell' uso, si fonda la celebre regola del tre, o regola aurea sì benemerita di tutto l'uman genere. Poichè per una tal regola altro non si fa, che determinare il quarto termine di proporzione, dati i primi tre. Il che si fa con moltiplicare i termini di mezzo, e dividere il prodotto pel primo termine, secondo quel decantato verso

Duc ternum in medium, productum divide primo.

Uso della Proposizione X.

Teorema Fisico.

Le azioni de' corpi, le quali si diffondono sfericamente, ed equabilmente, diminuiscono in ragion duplicata delle distanze.

Pochi sono i teoremi fisici, che siano più ampj, ed universali di questo, il qual si verifica di qualunque azione, che faccia un corpo, per esempio illuminare, attrarre, render suono, di qualunque azione, dissi, che sfericamente, ed equabilmente diffondesi, cioè, che si spande d' ogni intorno al modo, e colla legge, che i raggi di una sfera si spandono. Io sceglierò l' esempio della luce, e in essa stenderò la dimostrazione, la qual ciascuno applicherà alle altre simi-

migliànti azioni de' corpi. Dico adunque, che se due corpi, o un medesimo corpo in diversi tempi si esponga a un corpo luminoso L in diverse distanze, l'intensione, o vivezza della luce va scemando in ragion diretta duplicata delle distanze. Sian pertanto due corpi *mn*, MN, i quali suppongo essere fra lor paralleli. Nel primo di essi *mn* si scavi un qualunque poligono *abcd*, il quale trasmetta la luce, nell' altro corpo MN, e illumini una porzione del secondo corpo ABCD, la qual porzione sarà un poligono somigliante al primo *abcd*; come è agevole a dimostrare. Poichè considerando il triangolo CLB, si troverà equiangolo al triangolo *cLb* essendo CB parallela a *cb*. Onde sarà CB : *cb* = LC : L*c*. Similmente mostrasi LC : L*c* = DC : *dc*. Onde i due lati BC, CD son proporzionali a' due lati *bc*, *cd*, e tutti gli altri similmente proporzionali a tutti gli altri. Colla stessa facilità mostrasi l' ugualtà degli angoli. Or si consideri, che niente più di luce passa pel poligono, o illumina il poligono *abcd*, che illumini il maggior poligono ABCD. Onde essendo la stessa quantità di luce divisa pel minor poligono, e pel maggiore, sarà come il minor poligono al maggiore, così la rarità della luce nel minore alla rarità della luce nel maggiore. Ma i poligoni *abcd*, ABCD sono in ragion duplicata di due lati omologi, per esempio,

Tav. X. Fig. VI.

ad,

ad, AD. Onde la rarità della luce nell' uno alla rarità nell' altro in ragion duplicata di *ad* ad AD. Ma essendo *ad*: AD = L*a* : LA, la ragion duplicata di *ad*: AD sarà la stessa, che la ragion duplicata di L*a* : LA. Onde la rarità della luce cresce, o ciò, che è lo stesso la sua vivezza, e intensione scema in ragion duplicata delle distanze. Poichè L*a*, LA son le distanze, potendosi pigliar perpendicolarmente.

A meglio concepire l' accrescimento della rarità, suppongasi ne' tre punti *i*, *a*, *p* passar tre raggi, tra de' quali niun altro sia frapposto, i quali tre raggi giungano ne' tre punti I, A, P del maggior poligono. Sarà il triangolo *iap* al triangolo IAP, come il poligono minore al maggiore. Ma il triangolo *iap* rappresenta la rarità della luce nel minor poligono, e il triangolo IAP la rarità della stessa nel maggiore. Poichè si suppone, che altri raggi non si frappongano. Onde sarà la rarità della luce nel minore, alla rarità nel maggiore, come il minore, al maggior poligono. Or essendosi mostrato il minor poligono al maggiore essere in ragion duplicata delle distanze, sarà nella stessa ragione la rarità, o la diminuzione de' raggi luminosi. Ciò, che si aveva a dimostrare.

Lo stesso si dimostra delle attrazioni, delle pressioni, e altre azioni, che in giro sfericamente, ed equabilmente si spandono.

Uso

Uso della Prop. XII.

Teorema Meccanico = Fisico.

La quantità del moto di due corpi inuguali, che in diversi tempi si muovono colla stessa velocità, sono in ragion composta delle masse, e de' tempi, in cui i corpi si muovono.

Tav. X. Fig. VII. Siano Z, X due corpi di diversa massa, cioè, che anno qual maggiore, qual minor quantità di materia. La linea A B rappresenti la massa del corpo Z, e la linea A D rappresenti la massa del corpo X. In oltre la linea B C perpendicolare ad A D sia la via fatta dal corpo Z, e D E la via fatta dal corpo X. La linea A B s'intenda divisa in particelle infinitamente piccole rappresentanti l'Elemento della massa del corpo Z, cioè una parte indefinitamente piccola della sua massa.

Essendo B C la via fatta da tutto il corpo Z, sarà la via fatta da ciascuna particella della massa. Onde, se la lineetta B *a* si concepisca scorrere sopra la B C perpendicolarmente finchè giunga in C, descriverà col suo moto il rettangolo *a* C, il qual rettangolo esprimerà il moto di quella particella per la via B C. Similmente il rettangolo *be* esprimerà tutto il moto della seconda particella, il terzo della terza, e tutto il rettangolo A C esprimerà tutto il moto del corpo Z per la via B C. Non altrimenti si mostra il rettangolo A E rappresentare tutto il moto del corpo X. Ma questi due rettangoli

li ſono (*a*) in ragion compoſta de' lati comprendenti l'angolo retto, cioè del lato AB al lato AD, e del lato BC al lato DE, de' quali due primi ſon le maſſe, e i due ſecondi ſono in ragion de' tempi. Poichè, eſſendo uguale in amendue i corpi la velocità, in tempi uguali deſcriveranno ſpazj uguali. Onde in tempi diſuguali deſcriveranno ſpazj, che ſaran come i tempi. Sicchè le quantità del moto di tali due corpi, che ſi muovano colla velocità medeſima, ma in diverſi tempi, ſono in ragion compoſta de' tempi, e delle maſſe. Ciò ec. (*a*) Per la Prop.

Uſo della Prop. XVII. al Corollario II.

Teorema I. Meccanico = Fiſico.

Se due corpi uguali intorno a un centro ſi rivolgano in due diverſi cerchj, ma in tempi uguali, le loro forze centrifughe ſono in ragion de' ſemidiametri de' cerchj che eſſi deſcrivono.

Sian due corpi di ugual maſſa A, B i quali intorno al centro C ſi ravvolgano ciaſcuno nella ſua circonferenza, il corpo A nella circonferenza AEM*d*, e il corpo B nella circonferenza BSND, e ciò facciano in tempi uguali, o allo ſteſſo tempo. Dico, la forza centrifuga del corpo A eſſere alla forza centrifuga del corpo B come il ſemidiametro AC al ſemidiametro BC. Si pigli un' arco DO indefinitamente piccolo, e ſi conduca al centro la OC. Indi ſi con- Tav. X. Fig. VIII.

conduca il diametro DS, e le due perpendicolari ad esso OV, *ov*.

Giacchè per ipotesi questi due corpi fanno nel tempo stesso le lor rivoluzioni, nel tempo stesso ancora fanno ciascuna particella simile di essa. Onde nel tempo, in cui il corpo B trascorre l'arco indefinitamente piccolo DO, trascorrerà l'altro *do* somigliante al primo. Onde la linea DV esprimerà la forza centrifuga del corpo B, e la linea *dv* esprimerà la forza centrifuga del corpo A (*a*). Ma DV : *dv* = DC : *dc*. Poichè sarà l'arco DO al suo simile *do*, come il semidiametro DC al semidiametro *d*C (*b*). Ma potendosi questi due archi pigliar, come due corde, o linee diritte per la lor infinita piccolezza, saranno somiglianti i triangoli DVO, *dvo*. Onde sarà DV : *dv* = DO : *do*. Ma è stato mostrato esser DO : *do* come il raggio DC al raggio *d*C. Onde le forze centrifughe sieguono in tal caso la proporzione de' raggi de' cerchj, che i corpi descrivono. Ciò ec.

(*a*) *Uso della Prop.* 6.

(*b*) *Per la Prop.*

Teorema II.

Le velocità di due corpi, che nello stesso tempo fanno ciascuno il suo cerchio, sono in ragion delle stesse forze centrifughe. Poichè tali velocità sono, come gli archi DO, *do* nello stesso tempo descritti. Ma tali archi sono in ragion delle forze centrali, onde anche le velocità sieguono la ragione delle forze centrali. Ciò ec.

Uso

Uso della Prop. XVIII.

Teorema I. Meccanico ⇄ Fisico.

Le resistenze, che fanno due cilindri di uguali filamenti, e tessitura all'essere spezzati per diritto, sieguono le ragioni de' quadrati de' loro diametri, o ciò, che è lo stesso, le forze rompenti due cilindri tirati per diritto sono in ragione de' quadrati de' loro diametri.

Sian due cilindri di diversa grossezza, o diametro AB, CD, i quali suppongansi interiormente di filamenti, di fibre, di tessitura uguale, e ugualmente spessa, e resistente. Tav. X. Fig. IX. Questi due cilindri sian tirati per diritto, cioè secondo la dirittura de' loro assi *ab*, *de*, e le due potenze trahenti V, P si carichino fino a tanto, che il cilindro AB venga a spezzarsi in qualche parte, come in NO. Similmente le altre due potenze trahenti il secondo cilindro, cioè X, Z si carichino, finchè questo secondo ancora venga a spezzarsi in qualche parte, come in IM, dico, le potenze V, P, alle potenze X, Z, o vero una di esse P, a un'altra Z essere, come i quadrati delle linee AF, CE, che sono i diametri di tali cilindri.

Poichè le forze Rompenti in tal caso sono proporzionali alle fibre, o filamenti, che alla rottura resistono. Ma tali fibre, o filamenti sono in ragion de' cerchj, o delle basi A*i*F, C*s*E. Poichè supponendosi tali filamenti ugual-

men-

mente sparsi ne' due cilindri, in tanto maggior numero essi saranno, quanto la base, o qualunque altra sezione ad essa parallela è maggior dell' altra base, o qualunque sezione ad essa parallela. Ma le basi de' cilindri altro non son, che cerchj, e i cerchj (a) sono come i quadrati de' diametri. Onde le fibre, e filamenti resistenti allo spezzamento, e per conseguente le forze rompenti sieguono la proporzione de' quadrati di tali diametri. Ciò ec.

a) Per la Prop.

Teorema II.

Ma se la densità de' filamenti, o fibre, che alla rottura resistono, fosse diversa secondo qualunque ragione, allora è facile a dimostrare, che le resistenze, e le forze rompenti devono seguire la ragion composta de' quadrati de' diametri, e della ragion della densità. Ma è da avvertirsi che in questi due teoremi non si è fatta considerazione della gravità degli stessi cilindri, la qual considerazione involgendo l' opera della leva, e perciò delle lunghezze degli stessi cilindri, ad altro volume si appartiene, e richiede maggior capitale di studio, e di dottrina, che da un giovane principiante possa, e debba aspettarsi.

IL FINE.

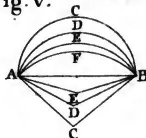
Tavola I.







Fig. V.



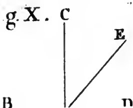
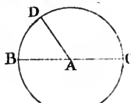


Fig. XI.





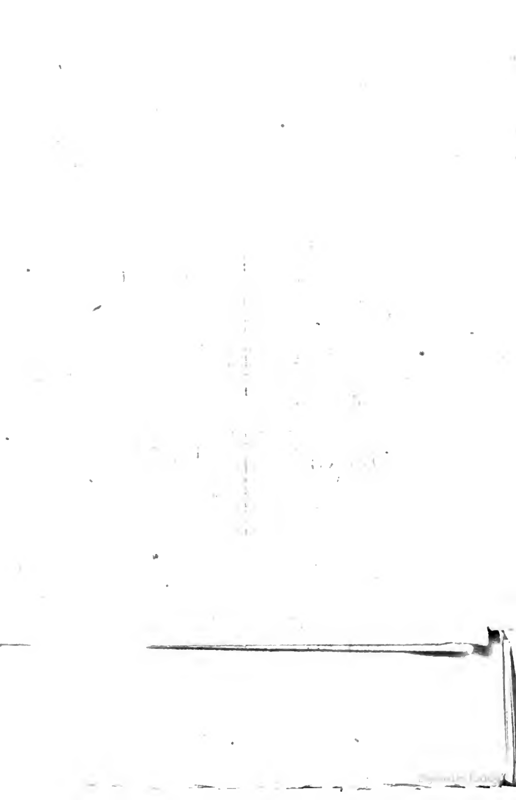


Tavola II.

Fig. VI.

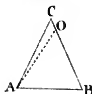


Fig. VII.

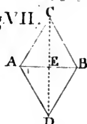


Fig. XIII.

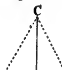


Fig. XIV.



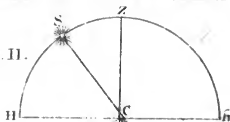

Fig. II.
S
Z
H
C
h


Fig. I.
A
B
C
D
Q
O


Fig. VI.
E
K
G
B




Fig.

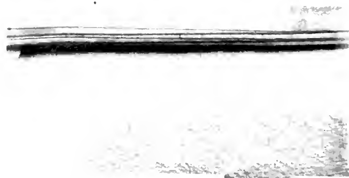


Tavola IV.

Fig. V.

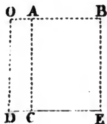


Fig. VI.

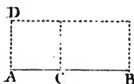
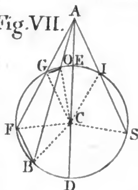


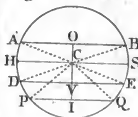
Fig. XI.

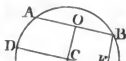
Fig. XII.

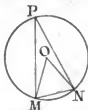


Tavola V.


Fig.VII.
A
G
O
E
I
C
F
S
B
D

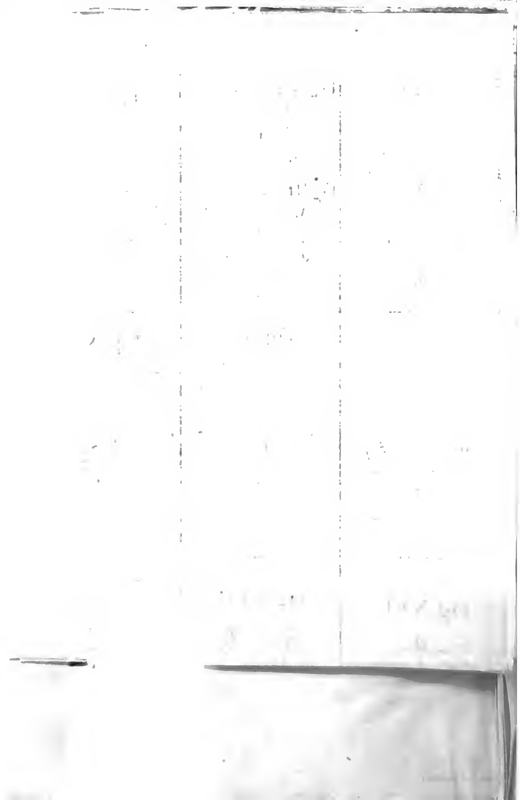

Fig.VIII.
A
O
B
H
C
S
D
E
V
P
I
Q


Fig.XIV.
A
O
B
D
C


P
O
M
N




E



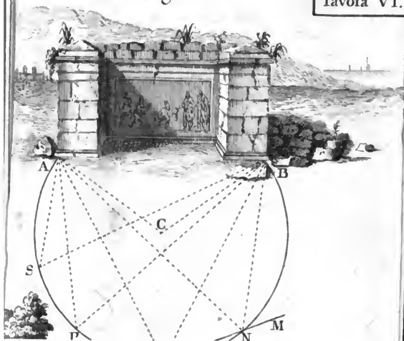
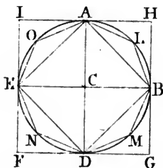

Fig VI:
Tavola VI.
A
B
C
S
P
N
M

Tavola VII.

Fig: III.



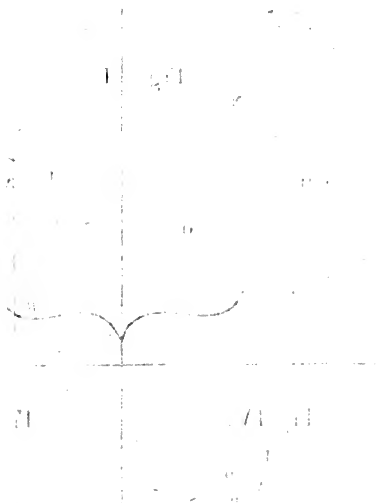
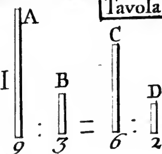


Tavola VIII



o Permutando sarà A : C = B : D
aut Permutando erit 9 : 6 = 3 : 2

onversa o inversa B : A = D : C
ione o invertendo 3 : ...



Tavola IX

Fig. VII.

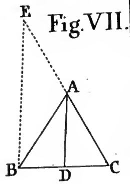


Fig. VIII.

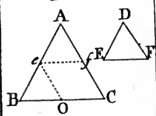


Fig. XIV.

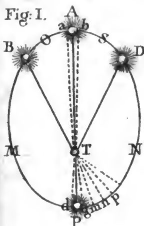


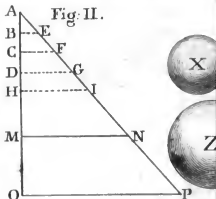


Fig. XV.






Fig: I.
A
a
b
B
O
S
D
M
T
N
d
P
p


Fig: II.
A
B
E
C
F
D
G
H
I
M
N
O
P


X


Z

